SUR LE SON DES CORPS ÉLASTIQUES

PAR FEU

Mr. LAMBERT,

de l'Acad. Roy. des Sc. & B. L. de Berlin (*).

I.

Le son des cordes vibrantes est produit par la tension qu'on leur donne, & à cet égard c'est l'art qui le produit. Il y en a un autre qui est plus naturel en ce qu'il ne suppose d'autre tension que celle que certains corps ont par eux-mêmes. Ce sont les corps élastiques. Mrs. D. BERNOULLI & EULER sont les premiers, qui ayent examiné ce son naturel des corps élastiques, en l'assujettissant au calcul. Ce calcul se fonde sur la nature de l'élasticité en tant que l'expérience journalière nous la fait connoître. Il y faut de la force lorsqu'une lame élastique doit être courbée à un certain point, & cette même force doit continuer d'agir si la lame doit rester dans cet état de courbure. Il suit de là que l'élasticité, faisant équilibre à une force, comme p. ex. à un poids, doit être une force elle-même. Par là elle peut être *force motrice* & *force accéleratrice* tout comme la gravité. Ce premier pas étoit facile à faire. Il n'en est pas de même du second. Il s'agit d'établir le rapport qu'il y a entre le degré de courbure & la force requise pour le produire. Cette question a

---

(*) Ce Mémoire, qui, ainsi que le suivant, nous a été communiqué par Mr. *Jean Bernoulli*, de la même Académie, a été composé en Janvier 1777.

D. B.

beaucoup d'affinité avec celle de la force requise pour rompre les corps, parceque d'un côté il n'y a gueres de corps si durs qui ne se courbent avant que de rompre, & que d'un autre côté les corps les plus élastiques rompent lorsqu'on les plie audelà d'un certain degré. Comme cette question a été fort débattue, il ne sera pas inutile de proposer là dessus les remarques suivantes.

II.

Tab. V. Fig. I. Soit *AB* une poutre fichée dans un Mur en *BC*, & portant en *a* un poids *P*. A mesure qu'on augmente ce poids la poutre se courbera d'avantage, & cela peut aller au point qu'elle rompt, ce qui ordinairement arrive en *B*. Il est évident que la partie supérieure de la poutre s'étend tandis que la partie inférieure se comprime, & qu'en tant que la section *BC* peut être regardée comme un levier, le point d'appuy est entre *B*, *C*, comme p. ex. en *D*.

III.

Fig. 2. Mais cette manière d'envisager la courbure est trop vague. Concevons donc dans une poutre *AB* avant qu'on la plie deux sections *ab*, *ab*. Il est clair qu'en la pliant les particules de ces sections auront la position *cd*, *cd*. Elles s'éloignent les unes des autres dans la partie supérieure *ae*, *ae*, & se rapprochent dans la partie inférieure *ed*, *ed*. Les points *e*, *e* pourront plus ou moins être considérés comme des points d'appuy.

IV.

Or la force requise pour étendre & pour comprimer est en elle-même une fonction de la distance des particules qui par cette force doivent s'éloigner ou se rapprocher les unes des autres, plus qu'elles ne le font dans leur état naturel.

Ce n'eſt donc pas leur diſtance naturelle, mais l'accroiſſement & le décroiſſement qui entre dans le calcul. Si donc la diſtance dans l'état naturel eſt $=\delta$, elle ſera dans le cas de l'extenſion $= \delta + x$, & dans le cas de compreſſion $= \delta - x$, & la force requiſe pour produire l'extenſion x s'exprime généralement par

$$f = \alpha x - \beta x^2 + \gamma x^3 - \&c.$$

Cette même équation donnera la force comprimante en faiſant x négative. Je ſuppoſe que la compreſſion demande plus de force que l'extenſion, & par cette raiſon j'ai fait négatifs les termes, qui ſont de dimenſion paire. Cependant la différence ne devient ſenſible, que lorſque la valeur de x eſt aſſez grande pour que le ſecond terme & les ſuivants ne puiſſent pas être omis.

V.

La variable x croît en raiſon de la diſtance des particules du point d'appuy e. Soit une abſciſſe quelconque $ef = z$, & nous aurons $x = n z$, où n eſt un coëfficient, qui croît avec l'angle cea, mais qui eſt conſtant lorſque cet angle l'eſt auſſi. Nous aurons donc pour les particules en ef la ſomme des moments ſtatiques

$$S\, f z\, d z = \tfrac{1}{3} \alpha n z^3 - \tfrac{1}{4} \beta n^2 z^4 + \tfrac{1}{5} \gamma n^3 z^5 - \&c.$$

Et poſant $ec = \zeta$, $cd = a$, la ſomme totale des moments ſtatiques, tant pour l'extenſion que pour la compreſſion ſera

$$\begin{aligned} &= \tfrac{1}{3} \alpha n \zeta^3 - \tfrac{1}{4} \beta n^2 \zeta^4 + \tfrac{1}{5} \gamma n^3 \zeta^5 - \&c. \\ &+ \tfrac{1}{3} \alpha n (a - \zeta)^3 + \tfrac{1}{4} \beta n^2 (a - \zeta)^4 + \tfrac{1}{5} \gamma n^3 (a - \zeta)^5 - \&c. \end{aligned}$$

VI.

Cette ſomme doit être un *minimum*, parceque la poutre ſe plie de la manière *la plus aiſée de toutes*. Voilà ce qui détermine la poſition du point d'appuy e. Différentiant donc cette expreſſion en poſant ζ variable, & poſant la différentielle $=0$, nous aurons

$$\begin{array}{llll} 0 = \alpha n \zeta^2 & - \beta n^2 \zeta^3 & + \gamma n^3 \zeta^4 & - \&c. \\ - \alpha n (a - \zeta)^2 & - \beta n^2 (a - \zeta)^3 & - \gamma n^3 (a - \zeta)^4 & - \&c. \end{array}$$

Le premier terme de cette expreſſion étant pris tout ſeul comme cela peut ſe faire lorsque la barre n'eſt pliée que fort peu, on a $\zeta = \frac{1}{2} a$, de ſorte que dans ces cas le point d'appuy eſt au milieu de l'épaiſſeur *ab*.

VII.

Les coëfficiens α, β, γ, &c. étant inconnus il ſeroit inutile d'entrer plus en détail. J'obſerve donc que dans les applications qu'on a faites de cette théorie aux cas où la poutre étoit pliée au point d'être rompue, on s'eſt contenté du premier terme. On en a déduit que la force requiſe pour cet effet croît en raiſon du quarré de l'épaiſſeur totale a. C'étoit ſuppoſer que le rapport $a : \zeta$ reſtoit conſtant. Les expériences n'ont pas été fort contraires à cette ſuppoſition. Or comme dans ce mémoire il ne ſera queſtion que des cas, où les lames élaſtiques dans leurs oſcillations ſe courbent infiniment peu, nous ſommes d'autant plus en droit de retenir le premier coëfficient α tout ſeul.

VIII.

A cet égard donc on établit que *la force requiſe pour plier une lame élaſtique croît en raiſon de la courbure qu'on lui donne*, ou ce qui revient au même, *en raiſon réciproque du rayon oſculateur*. C'eſt auſſi le principe dont je me ſervirai, pour calculer ces oſcillations, afin de pouvoir enſuite comparer le calcul aux expériences que j'ai faites, dans le but d'examiner toute cette théorie.

IX.

Il convient d'obferver d'avance, que quand on calcule les vibrations des lames élaftiques, on commence par fuppofer qu'elles ont la courbure qu'elles doivent avoir pour que les ofcillations foient ifochrones. Cette fuppofition eft un peu gratuite, parceque dans les expériences on ne leur donne point cette courbure. Il feroit même affez difficile de la leur donner. On fe contente ou de plier la lame par une preffion latérale, ou de leur donner une fecouffe par un petit choc. Dans le premier cas l'ofcillation refte affez fimple, mais dans le fecond elle eft ordinairement compofée, deforte qu'on peut entendre plus d'un fon. Il fe peut fur tout dans le fecond cas, que la lame pendant fes ofcillations approche de plus en plus de la courbure qu'elle doit avoir pourque fes ofcillations foient ifochrones. Et comme on met pour bafe que ces ofcillations font très petites, il femble qu'une courbure un peu différente ne fauroit influer beaucoup fur leur durée. Quoiqu'il en foit, j'ai cru devoir d'abord faire abftraction de la figure requife pour l'ifochronifme, en me contentant de regarder la courbure comme infiniment petite, & les ofcillations de la lame comme celles d'un pendule, en un mot comme fi elle ne fe courboit que parcequ'elle doit être courbée pourque fa force élaftique devienne active. Par là le calcul fe fimplifie confidérablement. Je vais l'expofer enforte que d'abord j'en comparerai le réfultat avec quelques expériences faites dans ce but. Enfuite je pafferai au calcul, tel qu'il doit être lorsqu'en effet les lames font fuppofées avoir la courbure requife pour l'ifochronifme de leurs ofcillations.

X.

Fig. 3. Soit *BA* une lame élaftique naturellement droite, & partout d'une groffeur & d'une élafticité égale, fichée en *A* dans quelque corps immobile. Or tant que par une force appliquée perpendiculairement en *B* elle n'eft courbée que très peu, cette force ſera en raiſon de la diſtance $B\,D$, à laquelle elle recule l'extrémité D de ſa poſition naturelle B. Soit cette force $= p$, & faiſons $B\,D = b$. Soit deplus m la maſſe de la lame. Cette maſſe étant réduite au point D, devient $= \frac{1}{3}\,m$. Donc la force accéleratrice eſt $= 3\,p : m$. Suppoſons un pendule $\gamma\,\delta$ ſuſpendu en γ dans la verticale $\gamma\,\beta$, & dont la maſſe concentrée en δ ſoit $= \frac{1}{3}\,m$. On aura pour ce pendule la force motrice $= \frac{1}{3}\,m.\ \text{ſin}\,\beta\,\gamma\,\delta$, donc la force accéleratrice $= \text{ſin}\,\beta\,\gamma\,\delta$, & $\beta\,\delta = \gamma\,\delta.\ \text{ſin}\,\beta\,\gamma\,\delta$. Ces deux cas étant entiérement analogues, on n'a qu'à faire

$$\beta\,\delta = B\,D = b,\ \text{donc}\ \ b = \gamma\,\delta.\ \text{ſin}\,\beta\,\gamma\,\delta$$

& la force accéleratrice

$$\frac{3p}{m} = \text{ſin}\,\beta\,\gamma\,\delta = \frac{B\,D}{\gamma\,\delta}.$$

& ces deux équations donneront

$$\gamma\,\delta = \tfrac{1}{3}\,m.\,\frac{b}{p}$$

pour la longueur du pendule, dont les oſcillations ſont iſochrones avec celle de la lame élaſtique. Ainſi le nombre des vibrations en chaque ſeconde de tems ſera exprimé par

$$N = \frac{1}{\pi}.\sqrt{(2\,g\,p.\,\tfrac{1}{3}\,m\,b)}$$

où π déſigne la demi-circonférence du cercle dont le rayon eſt $= 1$, & g la chûte des graves dans la première ſeconde de tems.

XI.

Cette formule peut être comparée avec l'expérience moyennant les ſons. On connoitra la maſſe de la lame élaſtique m en la peſant. Et ſuſpendant à la lame en D un petit poids p, on trouvera de combien ce poids fera baiſſer la lame audelà de ce qu'elle baiſſe par ſon propre poids. Par là on connoit la longueur b. Enſuite comparant le ſon qu'elle rend avec celui d'un monochorde, on déterminera par là le nombre des vibrations N qui répond à ce ſon. Et voilà tout ce qu'il faut pour voir ſi la formule répond à l'expérience. Mais comme il arrive ordinairement qu'on entend plus d'un ſon, il nait de là une difficulté que nous leverons dans la ſuite. Je me ſuis donc ſervi d'un autre moyen, c'eſt que j'ai arrangé l'expérience enſorte que les oſcillations étoient aſſez lentes pour pouvoir être comptées.

XII.

Première Expérience.

J'ai pris un fil BA de cuivre jaune long de 143 lignes du pied de Rhin, & peſant 11,4 grains poids de Berlin. Chargeant ce fil en D d'un poids de 5 grains, je trouvai qu'il baiſſoit de 2 pouces ou 24 lignes audelà de ce qu'il baiſſa par ſon propre poids. Ce fil, reſtant chargé de ce poids, fit 114 oſcillations dans un tems de 30 ſecondes, cequi donne 3,8 oſcillations par ſeconde. Mais ſans être chargé de ce poids il fit 142 oſcillations pendant 30 ſecondes de tems, ce qui fait 4,73 oſcillations par ſeconde.

XIII.

La maſſe du fil réduite en D eſt donc $=3,8$ grains. A cette maſſe il faut dans le premier cas ajoûter celle du poids que ce fil portoit & qui eſt $=5$ grains. Donc la maſſe entiere réduite en D eſt $=3,8+5=8,8$ grains; Valeur que dans la formule il faut mettre à la place de $\frac{1}{2}m$. Enſuite la force motrice eſt le poids de 5 grains $=p$. A proprement parler il faudroit y ajoûter encore le poids du fil réduit en D, c'eſt-à-dire à ſa moitié, pour avoir la force motrice toute entière. Mais on peut l'omettre parce qu'il faudroit augmenter dans le même rapport l'abaiſſement de 24 lignes, cet abaiſſement n'étant dû qu'au poids de 5 grains tout ſeul. Ainſi donc le premier cas de l'expérience nous donne les valeurs

$$\tfrac{1}{2}m = 8,8 \text{ grains.}$$
$$p = 5,0 \text{ grains.}$$
$$b = 24,0 \text{ lignes.}$$

Or

Or on a $g = \frac{1000}{64}$ pieds de Rhin $= 2250$ lignes. Donc faiſant $\pi = 3,14159\ldots$, & ſubſtituant ces valeurs dans la formule, elle donne $N = 3,3$. L'expérience donne $N = 3,8$, & par conſéquent $0,5$ de plus.

XIV.

Dans le ſecond cas on a ſimplement $\frac{1}{3}m = 3,8$, les valeurs de p, b reſtant les mêmes. Ainſi la formule donne $N = 5,0$. Et l'expérience $N = 4,73$, & par conſéquent $0,27$ de moins. Ici donc la différence eſt négative tandis que dans le premier cas elle eſt poſitive. J'en infere, que dans l'un & l'autre cas elle ne dérive que de ce que, les poids étant ſi petits, il eſt difficile de les évaluer avec toute l'exactitude requiſe.

XV.

Seconde Expérience.

Je repetai cette expérience avec un fil plus gros de 164 lignes de longueur, peſant 15,5 grains. Le même poids de 5 grains le fit baiſſer de 26,7 lignes audelà de ce qu'il baiſſa par ſon poids. Ce fil tout ſeul fit 124 oſcillations en 30 ſecondes de tems, ce qui fait 4,13 oſcillations par ſeconde. Or faiſant $m = 15,5$, $p = 5$, $b = 26,7$ lignes, la formule donne $N = \surd(456.5.3 : 15,5.26,7) = 4,35$, & par conſéquent $0,22$ de plus.

XVI.

Troisieme Expérience.

Je repetai cette expérience avec un fil de fer, de la longueur de 237 lignes, peſant 50,5 grains. Un poids de 19,2 grains le fit baiſſer de 26,2 lignes audelà de ce qu'il s'abaiſſa par ſon propre poids. Ce fil tout ſeul fit 264 vibrations en une minute, ce qui ſait 4,4 vibrations par ſeconde. Ici donc nous avons $m = 50,5$, $p = 19,2$, $b = 26,2$, ce qui donne $N = \surd(456.\ 3.\ 19,2 : 50,5.\ 26,2) = 4,44$. L'expérience donne 4,40, & par conſéquent 0,04 de moins.

XVII.

Pour revenir maintenant à la formule

$$N = \tfrac{1}{\pi} \surd(2gp : \tfrac{1}{3}mb)$$

il reſte à voir quels ſont les rapports entre p, m, b lorſque l'élaſticité reſtant la même ces valeurs varient. D'abord donc s'il n'y a que la largeur de la lame qui varie, il n'en réſulte d'autre changement, ſi non que le poids ou la force p doit augmenter dans le même rapport, afin que l'abaiſſement b reſte le même. Si donc le poids p eſt pour la largeur Λ, il faut que pour la largeur λ il ſoit $= p\lambda : \Lambda$.

XVIII.

Si outre cela c'eſt l'épaiſſeur qui varie, alors c'eſt en raiſon du cube de l'épaiſſeur qu'il faut changer la force p, afin qu'elle produiſe le même abaiſſement b, & par conſéquent la même courbure. Car l'angle *cea* (fig 2.) reſtant le même, il eſt clair qu'en augmentant l'épaiſſeur ab, & par conſéquent les bras du levier ea, eb, la force augmente 1°. en raiſon de ſa longueur, parceque le nombre des particules augmente dans ce rapport. 2°. en raiſon de la diſtance ca, parceque les particules en c, a ſeront d'autant plus éloignées les unes des autres, & que ce plus d'éloignement demande plus de force. Or ca croît en raiſon de ce, & par conſéquent en raiſon de ab, l'angle cea reſtant le même. 3°. encore en raiſon de la longueur parcequ'il s'agit du moment ſtatique, qui demande qu'on multiplie la force par ſa diſtance au point d'appuy. J'inſiſte ſur ce *cube* de l'épaiſſeur, parceque dans les cas où il s'agit de rompre une poutre on ne prend que le *quarré*. La différence conſiſte en ce que dans ce dernier cas ce n'eſt pas l'angle *cea* mais la diſtance *ca* qu'il faut regarder comme conſtante. C'eſt préciſément ce qui fait que les poutres moins épaiſſes ſe plient d'avantage avant que de rompre, que celles qui ont plus d'épaiſſeur. Mr. *Euler* employe le *quarré* comme vraiſemblable, non parcequ'il ſe doute s'il ne faut pas prendre le *cube*, mais parcequ'il laiſſe indéciſes les difficultés qu'on a faites au ſujet du point d'appuy *e*, & dont j'ai parlé cy-deſſus.

XIX.

Enfin ſi c'eſt la longueur qui varie, on n'a qu'à conſidérer les cas où la courbure reſte ſemblable, c'eſt à-dire où le rayon oſculateur CA, demême que l'abaiſſement, eſt en rapport de la longueur. Si donc les longueurs ſont L, l, les rayons oſculateurs R, r, & les forces requiſes p, p^1, on aura les moments ſtatiques Lp, lp^1, & ces moments ſont en raiſon réciproque des rayons oſculateurs. Donc

$$Lp : lp^1 = r : R.$$

$$p^1 = \frac{RL}{rl} \cdot p$$

Mais la courbure ſemblable donne

$$R : r = L : l$$

Donc

$$p^1 = \frac{LL}{ll} \cdot p$$

Donc la force varie en raiſon réciproque du *quarré* de la longueur. Il faut tout de même mettre $b^1 = bl : L$ à la place de b. Cela donne $p^1 : b^1 = pL^3 : bl^3$.

XX.

Ce même réſultat ſe trouve encore d'une autre manière. La courbure en A reſte la même, ſi au lieu de la force p appliquée en D, on en applique en M une autre $= p. AD : AM$. Mais alors au lieu de l'abaiſſement BD on n'aura que l'abaiſſement $QM = BD.AM^2 : AD^2$. Donc au lieu de $p : b$ on aura $pAD^3 : bAM^3 = p^1 : b^1$. C'est-à-dire $p^1 : b^1 = L^3 : l^3$.

XXI.

Quant à la masse il est évident qu'on aura $m^1 = m\lambda l\varepsilon : \Lambda LE$, où par ε, E je désigne les épaisseurs. Composant tous ces rapports, on aura

$$\frac{p^1}{m^1 b^1} = \frac{pLL}{ll} \cdot \frac{\Lambda LE}{m\lambda l\varepsilon} \cdot \frac{L}{bl} \cdot \frac{\varepsilon^3}{E^3}$$
$$= \frac{p}{mb} \cdot \frac{L^4 . \varepsilon^2}{l^4 . E^2}.$$

Et par conséquent le nombre des vibrations

$$N^1 = N . \frac{L^2}{l^2} \frac{\varepsilon}{E}$$

ou bien

$$N^1 = \frac{L^2}{l^2} \frac{\varepsilon}{E} . \pi \sqrt{\frac{2}{\frac{1}{3}} \frac{g}{m} \frac{p}{b}}.$$

Ainsi donc *le nombre des vibrations est en raison simple & directe de l'épaisseur, & en raison réciproque du quarré de la longueur.*

XXII.

En comparant à cet égard les deux premieres expériences, elles donnent les longueurs

$$L : l = 143 : 164$$

donc

$$L^2 : l^2 = 1 : 1,3152.$$

Ensuite on trouve les épaisseurs en divisant les masses 11,4 & 15,5 par les longueurs 143 & 164, & prenant les racines quarrées des quotients. On aura donc

$$\varepsilon : E = \sqrt{\frac{15,5}{164}} : \sqrt{\frac{11,4}{143}} = 1,089 : 1.$$

Donc

$$N^1 : N = 1,089 : 1,3152.$$

Mais dans la premiere expérience nous avions

$$N = 4,73$$

Donc

$$N^1 = 3{,}91.$$

Or la feconde expérience donne $N^1 = 4{,}13$, & par conféquent 0,22 de plus. Le calcul auroit donné encore moins, fi au lieu du *cube* de l'épaiffeur (Art. XVIII.) nous avions pris le *quarré*.

XXIII.

L'équation (Art. XXI.)

$$\frac{p^1}{m^1\, b^1} = \frac{p}{m\, b} \cdot \frac{L^4\, \varepsilon^2}{l^4\, E^2}$$

fe change en

$$p : p^1 = m\, b\, l^4\, E^2 : m^1\, b^1\, L^4\, \varepsilon^2.$$

Et comme

$$m : m^1 = L\, \Lambda\, E : l\, \lambda\, \varepsilon$$

on aura

$$p : p^1 = \frac{b\, \Lambda\, E^3}{L^3} : \frac{b^1\, \lambda\, \varepsilon^3}{l^3}$$

ou réciproquément

$$b : b^1 = \frac{p\, L^3}{\Lambda\, E^3} : \frac{p^1\, l^3}{\lambda\, \varepsilon^3}$$

ce qui veut dire que les abaiffements font en raifon directe du poids & du cube de la longueur, & en raifon réciproque de la largeur & du cube de l'épaiffeur. Ces équations peuvent fervir lorfqu'on veut comparer les valeurs p, b, Λ, L, E indépendemment des ofcillations, l'élafticité abfolue étant la même. Et fi elle n'eft pas la même, comme p. ex. lorfque les lames font de matière différente, la différence qu'on trouvera entre les poids p, p^1, & les valeurs $b\, \Lambda\, E^3 : L^3$ & $b^1\, \lambda\, \varepsilon^3 : l^3$ fera connoître le rapport entre les élafticités abfolues.

XXIV.

Fig. 4. Les réflexions génerales que je viens de propofer s'étendent à tous les corps élaftiques, qui font de même figure quoique de différente grandeur. Soient p. ex. deux anneaux élaſtiques d'une même matière & d'une même élaſticité, *A*, *B*. Qu'on les ſuppoſe comprimés par des poids ou des forces p, p^1, enſorte que leurs figures ſoient ſemblables. Les diametres verticaux ſeront raccourcis enſorte qu'étant d'abord $= L$, l, ils ſeront $= L - b$, $l - b^1$. On aura donc

$$L : l = b : b^1.$$

Les forces p, p^1 ſeront en raiſon des largeurs Λ, λ & du cube des épaiſſeurs E^3, ε^3. Et comme les rayons de courbure ſont également en raiſon des diametres L, l, on aura encore

$$p : p^1 = \frac{1}{L^3} : \frac{1}{l^3}.$$

Et par conſéquent

$$N^1 = N. \frac{L^2}{l^2} \frac{\varepsilon}{E}$$

comme cy-deſſus (Art. XXI.). J'entens du reſte que les compreſſions ſoyent petites, ſansquoi les abaiſſemens ou raccourciſſemens des diametres ne croîtroient plus aſſez exactement en raiſon des poids comprimants.

XXV.

Fig. 5. Si le corps élaſtique, au lieu d'être une lame droite ou un anneau, eſt l'un & l'autre, comme les verres, les gobelets, les cloches &c., les oſcillations ſe combinent, en ceque les ſegments annulaires font les leurs en forme d'anneaux, & les ſegments longitudinaux en forme de lames droites ou courbées conformément au profil de ces corps. Ainſi l'anneau *DC* devient une ovale *dc*, & les droites *AC*, *BD* prennent une courboure *Ac*, *Bd* ſemblable aux lames élaſtiques. La force élaſtique agit tant de l'une que de l'autre maniere; La maſſe qu'elle doit mettre en mouvement eſt la même, & le mouvement ſe fait en même ſens. Encore l'épaiſſeur eſt la même. Mais la longeur & la largeur changent de ſignification. Car ſi la longueur eſt *AC* dans le dernier cas, la largeur eſt toute la circonférence. Dans le ſeçond cas c'eſt la circonférence qui devient la longueur, &

la largeur eſt AC. Or ſi les verres ou les cloches ſont d'une figure ſemblable, la ſeule dimenſion de la longueur AC ou du diametre DC, & celle de l'épaiſſeur ſuffiſent pour déterminer le rapport entre les nombres des vibrations, ces nombres étant en raiſon directe de l'épaiſſeur & en raiſon réciproque du quarré de la hauteur AC ou du diametre DC. J'obſerve cependant que ces ſortes de corps demême que les lames ou les fils élaſtiques donnent ſouvent pluſieurs ſons, & que ce ne ſont pas toujours les plus graves qui ſe font entendre.

XXVI.

Fig. 3. Je dois encore remarquer que dans les réflexions précédentes j'ai ſuppoſé que la lame AD, lorſque la force ceſſe, conſerve dans ſes oſcillations la figure que lui donneroient des forces proportionelles agiſſantes ſur l'extrémité D ſuivant la direction BD. Mais la lame abandonnée à elle même prend quelque fois aſſez vite la figure qui rend ſes oſcillations iſochrones, de ſorte que les ordonnées BD, QM. &c. augmentent & diminuent conſtamment dans le même rapport, & ſont parcourues dans des tems égaux. Cependant quoique cette figure diffère de l'autre, la petiteſſe des excurſions réduit cette différence à peu de choſe, comme nous verrons dans la ſuite. Examinons d'abord la courbure dûe aux forces appliquées en D.

XXVII.

Fig. 6. Soit la Lame AB courbée en AMD par un poids P ſuſpendu à ſon extrémité D, enſorte que le rayon oſculateur en A ſoit AC, et dans un autre point M quelconque, MR. Soit MT la tangente, MP l'ordonnée de ce point M, & faiſons

$Ab = b$	$AP = x$
$AC = R$	$PM = y$
$MR = r$	$PTM = \omega$
$BD = f$	$AM = v$

Nous aurons d'abord

$$P.\ BP:\ \frac{1}{r} = P.\ BA:\ \frac{1}{R}$$

ou bien

$$(b - x)\ r = b\ R.$$

ce qui donne

$$\frac{1}{r} = \frac{b - x}{b\ R}$$

Or par la nature du rayon de courbure on a

$$\frac{1}{r} = \frac{d\ \omega}{d\ v}$$

Donc

$$\frac{(b - x)}{b\ R}\ dv = d\omega$$

Mais on a de plus

$$dv = \frac{d\ x}{cof\ \omega.}$$

donc

$$\frac{b - x}{b\ R}.\ dx = cof\omega.\ d\omega = d\ fin\ \omega$$

& en intégrant

$$\frac{2\ b\ x - x\ x}{2\ b\ R} = fin\ \omega.$$

Or comme $dy = dx.\ tang\ \omega$, on obtient

$$dy = \frac{(2\ b\ x - x\ x).\ dx}{\sqrt{[4\ b^2\ R^2 - (2\ b\ x - x\ x)^2]}}$$

Cette équation, en faifant

$$x = b\ (1 - cof\Phi)$$

$$\frac{2\ b}{R} = n$$

fe change en

$$-\frac{d\ y}{b} = \frac{n\ fin\ \Phi^3.\ d\Phi}{\sqrt{(1 - n^2\ fin\ \Phi^4)}}$$

Cette

Cette forme eſt une des plus ſimples qu'on puiſſe donner à cette équation. Cependant comme elle n'eſt pas généralement intégrable, il vaudra mieux poſer

$$x = n R z,$$

ce qui donne

$$z = \frac{x}{2b}$$

de ſorte que tant qu'on ne fait pas $x > b$, c'eſt à dire tant qu'on ne ſuppoſe pas la lame prolongée au delà du point D, on a néceſſairement $z < \frac{1}{2}$. Nous aurons donc

$$dy = \frac{nn(z - zz) R dz}{\sqrt{[1 - nn(z - zz)^2]}}$$

dont l'intégrale eſt la ſérie infinie

$$\frac{y}{nnR} = \tfrac{1}{2} z^2 - \tfrac{1}{3} z^3 + \frac{nn}{8} z^4 - \frac{3n^2}{10} z^5 + \frac{3n^2}{12} z^6 - \frac{n^2}{14} z^7$$
$$+ \frac{3n^4}{48} z^6 - \frac{15 n^4}{56} z^7$$
$$+ \frac{15 n^4}{32} z^8 - \text{\&c.}$$
$$+ \frac{5 n^6}{112} z^8 - \text{\&c.}$$

Si donc la courbure eſt très-petite, la valeur de n le ſera auſſi, & les deux premiers termes exprimeront aſſez exactement la nature de la courbe du moins juſqu'au point D.

XXVIII.

Lorſque $x = b$, on a $y = f$, $z = \frac{1}{2}$. Et comme $nnR = 4bb : R$, la ſérie pour ce cas ſe change en

$$\frac{fR}{bb} = \tfrac{1}{3} + \frac{n^2}{4.\,5.\,7.} + \frac{3\, n^4}{16.\,7.\,9.\,11.} + \frac{3.\,5.\,n^6}{64.\,9.\,11.\,13.\,15.}$$
$$+ \frac{3.\,5.\,7.\,n^8}{256.\,11.\,13.\,15.\,17.\,19.} + \text{\&c.}$$

d'où l'on voit

1°. que pour toutes les lames dont la courbure eſt ſemblable & par conſéquent le rapport n conſtant, l'ordonnée BD eſt en raiſon du quarré de AB diviſé par le rayon oſculateur R; ce qui du reſte eſt clair de ſoi même, parceque dans ces cas le rapport entre b, f, R eſt conſtant.

2°. Que ſi la courbure eſt petite, on a ſans erreur conſidérable

$$f = \frac{bb}{3R}$$

équation qui fait voir, comment la courbe AD diffère du cercle oſculateur au point A. Car ce cercle donneroit $f = bb : 2R$.

Cette même équation offre encore un moyen fort ſimple pour déterminer ce rayon oſculateur par des expériences. Car on a $R = bb : 3f$. Or b, f peuvent être meſurés ſans peine. On voit encore que pour tous les cas, où R eſt conſtant, l'ordonnée f eſt en raiſon du quarré de la longueur b. C'eſt une propriété dont je me ſuis ſervi cy-deſſus (Art. XX.).

XXIX.

La ſérie que nous venons de trouver fait encore voir, que tant que la courbure de la lame eſt aſſez petite pour qu'on puiſſe s'en tenir aux deux premiers termes, on aura

$$y = \frac{4bb}{R}\left(\tfrac{1}{2}z^2 - \tfrac{1}{3}z^3\right)$$

ou bien

$$y = \frac{1}{R}\left(\tfrac{1}{2}x^2 - \frac{x^3}{6b}\right)$$

donc

$$f = \frac{bb}{3R}$$

&

$$f : y = 2b^3 : (3bx^2 - x^3)$$

Donc ſi on varie la force qui fait courber la lame, &

que par là on varie les ordonnées f, y, cette équation fait voir que le rapport $f : y$ pour une même abſciſſe x reſte conſtant.

XXX.

J'obſerverai encore que la courbe AD continuée de part & d'autre s'étend à l'infini. Le point D eſt le point d'inflexion, & de part & d'autre la courbe eſt ſemblable. Car en poſant $z = 1 - \zeta$, on a

$$z - zz = \zeta - \zeta\zeta$$
$$dz = - d\zeta.$$

ce qui donne pour $- dy$ une équation en ζ abſolument identique à celle que nous avons eue pour $+ dy$ en z. Voilà ce qui prouve la reſſemblance de la courbe de côté & d'autre du point D. On le voit encore mieux, en ſe ſervant de l'équation

$$- \frac{dy}{b} = \frac{n. \sin \phi^3. \, d\phi}{\sqrt{(1 - n^2 \sin \phi^4)}}$$

dont l'intégrale eſt une ſérie de la forme

$$y = A. \cos \phi - B. \cos 3\phi + C. \cos 5\phi - \&c. + Const.$$

XXXI.

Paſſons maintenant à voir ce qui en eſt des oſcillations iſochrones des lames. Elles ſuppoſent des courbures déterminées dans ce but. Or quoiqu'il n'arrive jamais qu'on donne aux lames cette courbure, cependant il arrive que quelque courbure on leur donne elles s'approchent ordinairement aſſez vîte de celle qui répond à l'iſochroniſme des oſcillations. Dans le calcul on ſuppoſe la courbure telle que cet iſochroniſme l'exige. Il faut tout demême ſuppoſer les forces requiſes pour la donner à la lame, en ſorte que tant que ces forces continuent d'agir elles font équilibre à la force élaſtique de la lame, & la retiennent dans cet état de courbure. Ces forces en effet ne ſont qu'une feule, mais qui eft répandue fur toute la longueur de la lame, conformément à la courbure qu'elle doit avoir.

XXXII.

Fig. 7. Défignons cette force par la droite AE perpendiculaire à AB, pofition de la lame AD lorfqu'elle n'eft point courbée. Achevons le rectangle $ABCE$, & concevons une courbe $CSNA$ telle, qu'en tirant une ordonnée quelconque QS, cette ordonnée repréfente la partie de la force totale AE, qui eft répandue fur l'arc RA. Ainfi donc tirant une ordonnée $q\sigma$ infiniment proche de QS, la différentielle Ss repréfentera l'élément de la force qui agit fur l'élément de l'arc Rr. Cette force Ss fait donc équilibre à la force élaftique de la lame RA, entant que cette force élaftique agit fur l'élément Rr pour le mouvoir vers l'axe AB, et le meut en effet dès que la force qu'on lui oppofe ceffe.

XXXIII.

Or l'ifochronifme exige que les efpaces DB, RQ, MP &c. foient parcourus en même tems. Soit f la longueur du pendule ifochrone, & on aura pour l'élément Rr la force accélératrice, foit en divifant par cet élément, confidéré comme maffe, l'élément de force Ss, foit en divifant l'ordonnée QR par la longueur du pendule f. Ainfi donc on a l'équation

$$\frac{Ss}{Rr} = \frac{QR}{f}$$

qui donne

$$Ss = \frac{rR.QR}{f}.$$

XXXIV.

Maintenant il s'agit de voir comment la force AE produit la courbure de la lame AD. Pour cet effet nous poferons l'élasticité de la lame telle, que si à l'extremité D, ou à la distance horizontale AB, on y suspendoit un poids $= P$, ce poids produiroit en A une courbure dont le rayon soit $AF = R$. Soit donc M un point quelconque de la lame, $MG = r$ son rayon de courbure. Cette courbure est produite par la force NW répandue sur la partie MD de la lame. Il ne reste que d'en trouver le *moment statique*. Pour cet effet chaque élément Ss de cette force doit être multiplié par sa distance horizontale SV. Le produit étant l'élément $SVvs$ de l'aire CNW, il est évident que cette aire représente la somme des moments statiques de tous les éléments de la force NW répandue sur la partie de la lame MD. Si donc on fait cette aire $CNW = NW.\ MH$, cette droite MH sera le levier sur l'extrémité duquel la force NW doit être appliquée pour produire en M la meme courbure qu'elle produit étant répandue sur la partie de la lame MD. On aura donc

$$NW.\ MH : \frac{1}{r} = bP : \frac{1}{R}$$

ou bien

$$CNW = \frac{bPR}{r}.$$

XXXV.

Faisons $AP = x$, $PM = y$, $AM = v$, $PTM = \varphi$, $PN = z$, $AE = a$, & nous aurons (Art. XXXIII.)

$$dz = \frac{ydv}{f}$$

Donc

$$z = \frac{1}{f}.\ Sydv$$

Donc l'aire

$$PNA = \frac{1}{f}.\ Sdx\, Sydv.$$

Et posant l'aire totale $CAE = M$, nous aurons

$$CNW = M - ax + \frac{1}{f}.\ Sdx\, Sydv.$$

Et par conſéquent (Art. XXXIV.)

$$\frac{bPR}{r} = M - ax + \frac{1}{f} . S dx S y dv.$$

XXXVI.

Or par la nature du rayon de courbure on a

$$\frac{1}{r} = \frac{ddy.\ dx}{dv^3}$$

Donc

$$\frac{bPR.\ ddy.\ dx}{dv^3} = M - ax + \frac{1}{f} S dx S y dv.$$

Voilà donc l'équation qui exprime la nature de la courbe AD en général.

XXXVII.

Pour abréger le calcul que cette formule demande, on ſuppoſe les oſcillations aſſez petites pourqu'on puiſſe faire ſans erreur conſidérable $dv = dx$. De cette manière notre équation devient

$$bPR\,ddy = Mdx^2 - axdx^2 + \frac{dx^2}{f} . S dx S y dx.$$

En la différentiant deux fois de ſuite, poſant dx conſtante, elle ſe change en

$$fbPR\,d^4y = y dx^4.$$

ou en faiſant

$$fbPR = \frac{1}{n^4}$$

$$d^4y = n^4 y dx^4.$$

Pour intégrer cette formule il ſuffira de poſer

$$y = Ax^2 + \alpha x^3 + Bx^6 + \beta x^7 + Cx^{10} + \gamma x^{11} + \&c.$$

& nous aurons l'équation

$$\begin{aligned} 0 = &- n^4 A x^2 - n^4 \alpha x^3 - n^4 B x^5 \\ &+ 6.5.4.3\, B x^2 + 7.6.5.4\, \beta x^3 + 10.9.8.7\, C x^6 \\ &- n^4 \beta x^7 - \&c. \\ &+ 11.10.9.8\, \gamma x^7 + \&c. \end{aligned}$$

dont chaque terme doit être $= 0$. Cela donne

$$y = A \left[x^2 + \frac{n^4 x^6}{3.4.5.6.} + \frac{n^4 x^{10}}{3.4.\ldots.10} + \&c. \right]$$

$$+ \alpha \left[x^3 + \frac{n^4 x^7}{4.5.6.7.} + \frac{n^4 x^{11}}{4.5.\ldots.11.} + \&c. \right]$$

ou bien, en faisant $nx = \xi$,

$$y = \frac{A}{2nn}. \left[\frac{\xi^2}{1.2} + \frac{\xi^6}{1.2.3.4.5.6} + \frac{\xi^{10}}{1.2\ldots.10} + \&c. \right]$$

$$+ \frac{\alpha}{6n^3}. \left[\frac{\xi^3}{1.2.3} + \frac{\xi^7}{1.2\ldots.7} + \frac{\xi^{11}}{1.2\ldots.11} + \&c. \right]$$

d'où suit

$$y = \frac{A}{2n^2}. \left[\frac{e^{\xi} + e^{-\xi}}{4} - \tfrac{1}{2} \cos \xi \right]$$

$$+ \frac{\alpha}{6n^3} \left[\frac{e^{\xi} - e^{-\xi}}{4} - \tfrac{1}{2} \sin \xi \right]$$

où il ne reste plus que de déterminer les constantes A, α, n.

XXXVIII.

Pour cet effet on n'a qu'à faire $x = AB = b$, pour avoir $y = BD = c$, & deplus $ddy = 0$, & $d^3y = 0$. Car la courbure en D est nécessairement $= 0$, ce qui demande $ddy = 0$. Ensuite on a

$$d^3y = dx^3 \left(\frac{1}{f}. Sydx - a \right)$$

Or $Sydx$ ayant été substituée à $Sydv = fz$, cette équation est

$$d^3y = dx^3 \,(z - a).$$

Mais pour le cas où $x = b$, on a $z = a$; donc $d^3 y = 0$. Ces trois conditions donnent les trois équations suivantes :

$$c = \frac{A}{2nn}\left[\frac{e^{nb}+e^{-nb}}{4} - \tfrac{1}{2}\cos nb\right] + \frac{\alpha}{6n^3}\cdot\left[\frac{e^{nb}-e^{-nb}}{4} - \tfrac{1}{2}\sin nb\right]$$

$$0 = \frac{A}{2nn}\left[\frac{e^{nb}+e^{-nb}}{4} + \tfrac{1}{2}\cos nb\right] + \frac{\alpha}{6n^3}\cdot\left[\frac{e^{nb}-e^{-nb}}{4} + \tfrac{1}{2}\sin nb\right]$$

$$0 = \frac{A}{2nn}\left[\frac{e^{nb}-e^{-nb}}{4} - \tfrac{1}{2}\sin nb\right] + \frac{\alpha}{6n^3}\cdot\left[\frac{e^{nb}+e^{-nb}}{4} + \tfrac{1}{2}\cos nb\right]$$

d'où l'on déduit la valeur double

$$- e^{nb} = \operatorname{tang}\left(45^\circ \pm \tfrac{1}{2}\, nb\right)$$

& les valeurs numériques suivantes de nb

1,87510408
4,69409108
7,8547575
10,99554073
14,13716839
17,27875952
20,42035225
23,56194490
26,70353755
&c.

qu'on peut continuer à l'infini en ajoutant toujours $\pi = 3,1415926\ldots$ parcequ'à la fin cette progression diffère autant que rien d'une progression arithmétique.

XXXIX.

Ces valeurs numériques de nb étant déterminées, il est évident, que connoissant la longueur de la lame b, on aura tout autant de valeurs différentes pour n. Or comme

$$n^4 = \frac{1}{fbPR}$$

on

on aura pour la longueur du pendule

$$f = \frac{b^3}{PR\,(nb)^4}$$

tout autant de valeurs différentes. Et en désignant par F la longueur du Pendule à secondes, on aura le nombre des vibrations que la lame fait par seconde

$$N = \sqrt{\frac{F}{f}}$$

$$= \frac{(nb)^2}{b} \cdot \sqrt{\frac{FPR}{b}}$$

XL.

Observons maintenant que nous avons exprimé la masse de la lame par sa longueur. Cela fait que la force P doit tout de même être exprimée par une longueur. Si donc elle équivaut à un poids m fois plus grand que celui de la lame, on fera $P = mb$. Par là on a

$$N = \frac{(nb)^2}{b} \sqrt{(mFR)}$$

XLI.

Nous voicy donc en état de comparer ce nombre des vibrations avec celui que j'ai trouvé cy-dessus (Art. X), sans avoir supposé la courbure de la lame telle que l'isochronisme des vibrations l'exige. Pour cet effet je ferai dans la formule présente une double substitution. La premiere consiste en ce que pour la longueur du pendule à secondes F je mettrai sa valeur $2g : \pi\pi$. La seconde consiste en ce que pour R je mettrai sa valeur approchée $bb : 3c$ (Art. XXVIII.). Par là la formule se change en

$$N = (nb)^2 \sqrt{\frac{2gm}{3\pi\pi c}}$$

Or la formule trouvée cy-deſſus (Art. X.), & changée par rapport à la ſignification des lettres, eſt

$$N^{I} = \sqrt{\frac{6\,g\,m}{\pi\,\pi\,c}}$$

Donc

$$N^{I} : N = 3 : (nb)^{2}$$

Or au lieu de nb il faut mettre la premiere d'entre ſes valeurs numériques (Art. XXXVIII.), qui eſt $nb = 1,8751 \ldots.$ Ainſi nous aurons

$$N^{I} : N = 3 : 3,516 = 1 : 1,172.$$

deſorte que ces deux évaluations diffèrent à très-peu près d'une ſixieme partie.

XLII.

Ce n'eſt pas cependant que la formule préſente réponde mieux aux expériences rapportées cy-deſſus, que celle que j'y ai d'abord appliquée. Dans la premiere de ces expériences le calcul donne $N = 5,0$ (Art. XIV.) Ici il donneroit $N = 5,0.\ \frac{7}{6} = 5,8$, tandis que l'expérience ne donne que $N = 4,73$. Il en eſt de même des deux autres expériences (Art. XV. XVI). Ce paradoxe s'explique par ce que j'ai remarqué (Art. XXXI.), c'eſt qu'il n'eſt pas démontré que les fils de cuivre jaune & de fer que j'ai employés ayent acquis tout de ſuite la courbure, que l'iſochroniſme exige. Leur longueur ſurpaſſoit pluſieurs centaines de fois leur épaiſſeur, & leur élaſticité quoique aſſez bonne, ne pouvoit gueres s'étendre & produire ſon effet d'un bout à l'autre pour changer la courbure acquiſe en celle que l'iſochroniſme exige. C'eſt ce qui paroîtra d'une maniere bien évidente par les expériences, que je rapporterai dans la ſuite. Il réſulte de tout cela, que chacune des deux formules (Art. X. XXXIX.) a ſon uſage, mais qu'il faut connoître les circonſtances pour ſavoir de la quelle des deux il faut ſe ſervir dans chaque cas particulier. (Art. XXVI.) Le calcul aſſez ſimple qui a conduit à la premiere formule & ſurtout l'application fort génerale que j'en ai faite à des corps élaſtiques quelconques mais de figure ſemblable (Art. XXIV. XXV.), donne à cette formule une prérogative aſſez conſidérable, & la fera admettre comme approchante de la vérité encore dans les cas où la différence eſt la ſixième partie toute entiere.

XLIII.

Je dois encore avertir, que le calcul que je viens de donner (Art. XXXI—XXXIX.) revient dans le fond à celui de Mr. *Euler*, (*Methodus inveniendi lineas curvas* &c. p. 282—295.) mais la différence dans la manière de le propoſer eſt fort ſenſible. J'ai fait uſage de la courbe *C A* dont Mr. *Euler* n'employe que l'expreſſion analytique. Au lieu des trois conſtantes que j'ai à déterminer, Mr. *Euler* en a cinq, parceque ſon calcul eſt moins préparé à faciliter la ſolution, & ſurtout parcequ'il compte les abſciſſes de *B* vers *A*. Au lieu des ſéries dont je me ſuis ſervi de propos délibéré, Mr. *Euler* s'en rapporte à quelque autre mémoire. Enfin j'ai eu beſoin de pouſſer à un plus grand nombre de termes les valeurs numériques de $n b$ (Art. XXXVIII.). Tout cela m'a engagé à propoſer ce calcul à ma manière, en omettant cependant tout ce dont je n'ai pas beſoin.

XLIV.

Comme la formule qui donne le nombre des vibrations (Art. XL.) demande, non les valeurs $n b$, mais leurs quarrés, & que ſurtout j'aurai beſoin du rapport du premier de ces quarrés aux ſuivants, je vais encore donner ici ces rapports. Ce ſont ceux des ſons qu'une même lame élaſtique peut rendre, quoiqu'on n'en entende ordinairement que quelques uns.

Rapports des ſons
d'une lame èlaſtique.

1,00000
6,26689
17,54708
34,38009
56,80231
84,91303
118,59754
157,89614
253,33558
308,47643
371,23137
&c.

Les rapports ſuivants s'expriment par $(23 + 2\,n)^2$. 0,701760618. en faiſant ſucceſſivement $n = 1,2,3,4,$ &c.

XLV.

Ces ſons diffèrent très conſidérablement de ceux des cordes tendues par des poids ou d'autres forces équivalentes. Car ces dernières rendent tout ſimplement les ſons exprimés par les nombres naturels 1,2,3,4,5, &c. Avec tout cela il s'y trouve quelque analogie. La figure des cordes tendues eſt géneralement exprimée par

$$y = c.\ \mathit{ſin}\,\frac{n\pi x}{2\,b}$$

où on peut prendre pour n tous les nombres 1,2,3,4, &c. & tout autant de valeurs différentes de c. Mais la figure des lames élaſtiques dépend tant des *fonctions circulaires* que des *fonctions analogues hyperboliques*. Car déterminant les coëfficiens A, α, on trouve

$$y = \pm \tfrac{1}{2}\,c.\,(\mathit{coſ.\ hyp.}\ \xi - \mathit{coſ.\ circ.}\ \xi)$$

$$- \tfrac{1}{2}\,c.\left(\frac{1 \pm \mathit{coſ.}\ n\,b}{\mathit{ſin.}\ n\,b}\right) \cdot (\mathit{ſin.\ hyp.}\ \xi - \mathit{ſin.\ circ.}\ \xi)$$

où pour nb on peut ſubſtituer toutes les valeurs numériques trouvées cy-deſſus (Art. XXXVIII.) en prenant les ſignes $\pm$ conformément à l'équation $- e^{nb} = tang. (45 \pm \frac{1}{2} nb)$.

XLVI.

Quatrième Expérience.

Serrant fortement un fil de cuivre jaune dans un petit étau portatif, ce fil produiſit l'effet de la languette d'une trompe, c'eſt que pour bien entendre le ſon, il falloit mettre l'étau ou la pincette entre les dents. Voicy ce que je trouvai à l'égard des différentes longueurs de la partie du fil qui n'étoit point pincée, & qui par conſéquent pouvoit oſciller librement.

1. Quand cette longeur étoit audeſſous d'un pouce, je n'entendis bien clairement qu'un ſeul ſon.

2. En laiſſant à cette partie du fil une longueur de 15 & plus de lignes, j'entendis bien clairement deux ſons, dont l'un étoit le même que j'entendis tout ſeul, mais devenu plus grave. L'autre étoit plus aigu de deux octaves & d'une quinte, & même un peu audelà. Ces ſons étoient diſſonants, mais la diſſonance n'avoit rien d'offenſant pour l'oreille.

3. Allongeant d'avantage la partie oſcillante du fil, peu à peu le ſon grave devint inſenſible, & l'autre ſon devint plus grave, enſorte que le fil ayant environ 30 lignes de longueur je recommençai à entendre un troiſième ſon.

4. Allongeant encore le fil, le ſecond ſon devint inſenſible, le troiſième devint plus grave, & quand le fil commençoit à avoir 50 lignes de longueur, il fit entendre un quatrième ſon.

5. Cette alternative de ſons qui ceſſoient & commençoient à être perceptibles, revint à meſure que je laiſſai plus de longueur à la partie oſcillante du fil.

Voilà le phénomène en géneral. Mais pour connoître ces ſons plus exactement, je les comparai à ceux d'un monocorde, diviſé en 360 parties, & dont la corde étoit tendue enſorte que la longueur de 168 de ces parties répondit au ton

de ma flûte. Quand la corde élaſtique fit entendre deux ſons à la fois, je pris celui que je pouvois le mieux comparer au monocorde. Quelque fois je m'aidai en prenant l'octave, & faiſant enſuite la réduction. Ces meſures devoient ſervir à un double but.

1° Il s'agîſſoit de voir ſi les 2, 3, 4, 5. . . . . *mes* ſons que j'entendis pouvoient être réduits au premier, ce qui doit ſe faire en multipliant le nombre du monocorde par celui des rapports (Art. XLIV.) que l'ordre du ſon demandoit. Car quoique le premier ſon devint imperceptible, la corde élaſtique ne laiſſoit pas de faire les oſcillations qui y répondent. Ainſi moyennant ces rapports on peut aſſigner la longueur du monocorde requiſe pour des oſcillations iſochrones.

2. Enſuite il s'agiſſoit de voir ſi ce premier ſon ou bien la longueur répondante du monocorde croîſſoit en raiſon du quarré de la longueur du fil élaſtique. Cela ſe trouvoit en diviſant la longueur du monocorde par le quarré de celle du fil élaſtique. Tous les quotiens doivent être égaux, du moins autant que les petites erreurs inévitables dans l'obſervation le permettent.

C'eſt ce qu'il convenoit de faire obſerver d'avance, afin de faire d'abord d'autant mieux comprendre la table ſuivante.

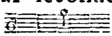
Longueur du fil élaſtique $= b$, en lignes	Nombres du monocorde $= M'$	Rapports (Art. XLIV.) par les quels il faut multiplier M'	Nombres M réduits, $= M$	Rapport $M : \lambda\lambda$
5	60	1,0000	60	2,40
6	82		82	2,28
7	115		115	2,35
8	148		148	2,31
9	184		184	2,27
10	223		223	2,23
11	273		273	2,26
12	338		338	2,35
13	380		380	2,25
14	440		440	2,25
15	492		492	2,19
16	93	6,2669	582	2.28
17	108		677	2,34
18	120		752	2,32
21	157		984	2,23
24	203		1272	2,21
27	269		1686	2,34
30	320		2005	2,23
33	372		2331	2,12
36	170	17,5471	2983	2,30
39	196		3439	2,26
42	222		3895	2,21
45	261		4589	2,27
48	297		5211	2,27
51	327		5738	2,21
54	370		6492	2,23
57	414		7265	2,24
60	224	34,3801	7701	2,14
63	257		8836	2,23
66	285		9798	2,25
69	310		10658	2,24
72	350		12033	2,32
75	362		12425	2.22
78	240	56,8023	13633	2,24
84	283		16075	2,28
90	321		18234	2,25
100	397		22551	2,26
110	334	84.913	28361	2,34
120	397		33965	2,33
130	465		39485	2,33
140 &c.	361 &c.	118,5975	42814 &c.	2,19 &c.

On voit donc que les rapports ou quotiens $M: \lambda\lambda$ de la dernière colonne diffèrent assez peu entr' eux, & qu'ils sont indifféremment plus grands & plus petits, que le terme moyen, qui est $= 2,264$.

XLVII.

Comme le fil employé dans cette expérience est le même que celui de la première expérience, cela nous offre encore une comparaison à faire. Dans la première expérience la longueur du fil étoit de 143 lignes. Multipliant donc le quarré de ce nombre par le terme moyen 2,264 le produit 46252 est le nombre M qui dans la quatrième colonne doit répondre au nombre $\lambda = 143$ dans la première. Or dans mon *Mémoire sur les flûtes* j'ai trouvé que le ton

est dû à 125 vibrations par seconde, ce qui pour le ton



donne 1500 vibrations, ce ton étant plus aigu de trois octaves & d'une quinte, c'est-à-dire dans le rapport de 1 à 12. Or ces 1500 vibrations répondant au nombre $M = 168$ du monocorde, on fera

$$46252 : 168 = 150 : 5,43.$$

desorte que suivant ce calcul le fil ayant 143 lignes de longueur devoit faire 5,43 vibrations par seconde. Les deux autres calculs faits cy-dessus (Art. XIV. XLII.) donnent 5,0 & 5,8, & l'expérience, où je comptois les vibrations donna 4,73 (Art. XII.). Or cette évaluation devant se faire par estime peut très-bien être trop petite, desorte qu'en effet l'expérience pouvoit donner une valeur plus approchante de ce que donnent les calculs. J'observe donc seulement que le calcul présent donnant une valeur moyenne entre celles que donnent les deux calculs précédents, il y a apparence, qu'encore dans cette quatrième expérience le fil ne prit pas tout à fait la courbure requise pour des oscillations isochrones, mais que cependant il approcha de

cette

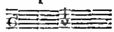
cette figure, beaucoup plus que dans la première expérience. Les corps élaſtiques ne laiſſent pas d'avoir une certaine *tenacité*, qui n'eſt vaincue qu'aux dépens d'une partie de la force motrice, & qui même quand elle eſt vaincue ne laiſſe pas de diminuer la viteſſe en raiſon de la viteſſe elle même. Il en réſulte le double effet: 1°. que les excurſions deviennent toujours plus petites. 2°. que cette diminution ſe fait enſorte que tout mouvement ceſſe dans un tems fini.

XLVIII.

Ce qu'il y a de remarquable dans notre quatrième expérience, c'eſt que ce ne ſont pas les ſons exprimés par les nombres de la quatrième colonne mais par ceux de la ſeconde, qui ſe font entendre bien clairement. C'eſt tout le contraire de ce qu'on obſerve à l'égard des cordes tendues, où c'eſt le ton le plus grave qui ſe fait entendre préferablement à ceux qui ſont plus aigus, & que la corde tendue rend tout à la fois; & ſi le ton le plus grave eſt trop foible pour être entendu, les autres le ſont encore d'avantage. Le mouvement qu'on leur imprime ſe communique & plus facilement & plus fortement à la corde toute entière qu'à ſes parties aliquotes. Mais au contraire celui qu'on imprime aux cordes ou lames élaſtiques, quand elles paſſent une certaine longueur, ſe communique & plus facilement & plus fortement aux parties qu'à la lame toute entière. Il faut même donner à la lame ou au fil élaſtique une ſecouſſe plus forte lorſqu'on veut entendre pluſieurs ſons, & encore ne les rend elle pas à moins qu'elle n'ait une certaine longueur. On explique par là les paradoxes, qu'on entend des fondeurs de cloche, c'eſt que quelques fois une cloche plus grande donne un ſon plus aigu, qu'une autre moins grande.

XLIX.

L'expérience que je viens de rapporter m'a fait naître l'idée d'en déduire différens usages. Le premier consiste en ce qu'elle fournit aux amateurs de la Musique un son assez constant, & qu'on peut porter sur soi sans la moindre incommodité. Il s'agit d'une petite piéce d'un fil de cuivre jaune ou de fer ou d'acier. On lui donne la longueur requise pour le ton qu'il doit rendre, & on l'affermit dans une petite piéce de fer ou d'acier, qu'on puisse serrer entre les dents, lorsqu'on veut entendre le son, que ce fil donne. Ainsi p. ex. en employant le fil qui m'a servi dans cette expérience de même que dans la première (Art. XII.), ce fil ne doit avoir que $11\frac{1}{2}$ lignes de longueur pour rendre le ton



de ma flûte. Ce ton répond au nombre 300 de mon monocorde, & la table précédente fait voir que ce nombre répond à la longueur $\lambda = 11\frac{1}{2}$ lignes. Si on veut la trouver plus exactement, on divise le nombre 300 par le terme moyen des nombres de la dernière colonne 2,264 (Art. XLVII.), & on extrait la racine quarrée du quotient 132,6. Cette racine est $= 11{,}52$ lignes $= \lambda$. Si le fil est plus gros, ce quotient doit être augmenté en raison du diametre, & ensuite on extrait la racine quarrée (Art. XXI.). Cette règle cependant suppose que l'élasticité absolue est la même.

L.

Le second usage consiste dans une *Musique solitaire*, qui ne se fait entendre que de celui, qui tient entre les dents quelque fil de fer qui aboutit à l'instrument. Cet instrument ne consiste que dans une barre de fer, dans laquelle sont fixés des fils de cuivre jaune ou d'acier, dont la longueur répond exactement aux tons de la Musique. On aura quatre octaves en ne donnant qu'environ deux pouces de longueur au fil, qui rend le son le plus grave, en le prenant assez épais pour qu'il ne fasse entendre qu'un seul son. La longueur des autres fils va en décroîssant jusqu'à 6 lignes ou encore moins. Cet instrument pourra avoir des touches comme les claveſſins, & être arrangé enſorte que le ſon ne dure que tant qu'il le faut. Dans ce cas la barre de fer, dans laquelle les fils ſont fixés, doit avoir une courbure logarithmique ou approchante, afin que les extrémités des fils ſoient placés en ligne droite. Quand les fils ſont bien affermis dans la barre, le ſon ſera aſſez conſtamment le même, l'élaſticité ne ſouffrant qu'aſſez peu par la variation de la chaleur, & le changement qui en réſulte étant commun à tous les fils, la proportion des ſons reſtera aſſez ſenſiblement la même. Cet inſtrument ſera d'un bon uſage à ceux qui voudront eſſayer des coups d'eſſai de compoſition ſans être entendus, & ſe procurer la jouiſſance des agrémens de la muſique ſans incommoder les autres, ou ſans éveiller ceux qui dorment.

SUR LES MACHINES QUI PRODUISENT LEUR EFFET AU MOYEN D'UNE MANIVELLE;

PAR FEU

MR. LAMBERT,

de l'Acad. Roy. des Sc. & B. L. de Berlin (a).

I.

Les machines, dont je vais traiter dans ce Mémoire, ſont d'un uſage fort fréquent dans l'Hydraulique, lorsqu'il s'agit de porter l'eau à une très grande hauteur, & en grande quantité,

(a) On voit par un Journal Manuſcrit de feu M. *Lambert* qu'il a compoſé ce Mémoire en Juillet 1775. (Note de M. *Jean Bernoulli.*)

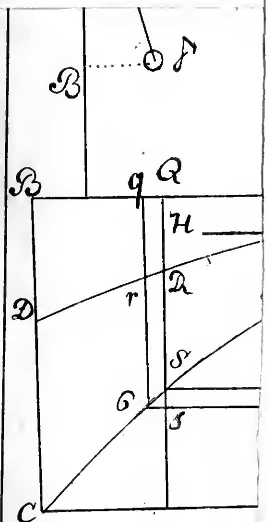


Fig.7.

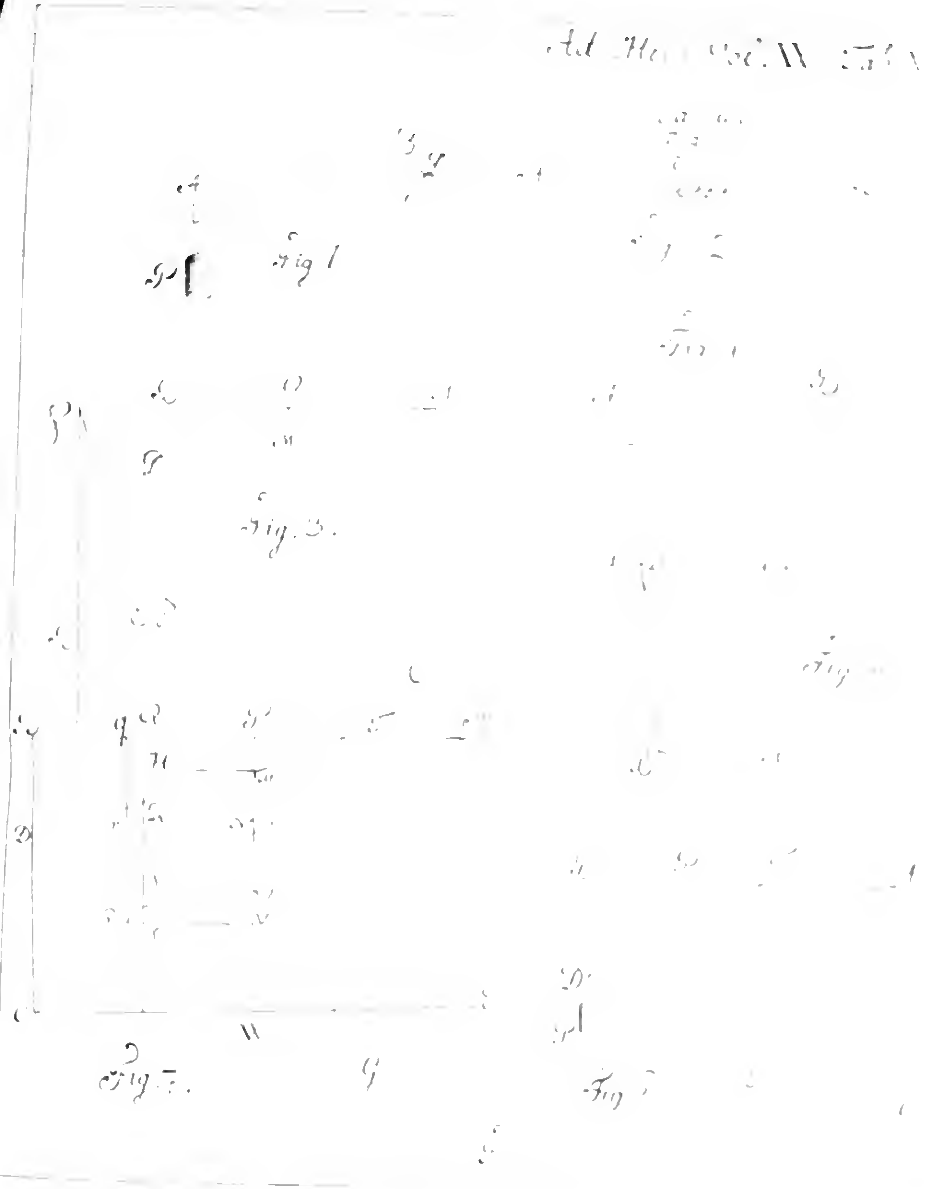


Fig. 1
Fig. 3.