les claveffins, & être arrangé enforte que le fon ne dure que tant qu'il le faut. Dans ce cas la barre de fer, dans laquelle les fils font fixés, doit avoir une courbure logarithmique ou approchante, afin que les extrémités des fils foient placés en ligne droite. Quand les fils font bien affermis dans la barre, le fon fera affez conftamment le même, l'élafticité ne fouffrant qu'affez peu par la variation de la chaleur, & le changement qui en réfulte étant commun à tous les fils, la proportion des fons reftera affez fenfiblement la même. Cet inftrument fera d'un bon ufage à ceux qui voudront effayer des coups d'effai de compofition fans être entendus, & fe procurer la jouiffance des agrémens de la mufique fans incommoder les autres, ou fans éveiller ceux qui dorment.

SUR LES MACHINES
QUI PRODUISENT LEUR EFFET AU MOYEN D'UNE MANIVELLE;

PAR FEU

MR. LAMBERT,

de l'Acad. Roy. des Sc. & B. L. de Berlin (a).

I.

Les machines, dont je vais traiter dans ce Mémoire, font d'un ufage fort fréquent dans l'Hydraulique, lorsqu'il s'agit de porter l'eau à une très grande hauteur, & en grande quantité,

(a) On voit par un Journal Manufcrit de feu M. *Lambert* qu'il a compofé ce Mémoire en Juillet 1775. (Note de M. *Jean Bernoulli.*)

par des pompes ſoit aſpirantes ſoit foulantes. Le rouage de ces machines ſe met en mouvement par l'eau courante, par le vent, par des animaux, ou par quelle autre force que ce ſoit. Au dernier Eſſieu ſont appliquées une, deux, trois, quatre, ou même pluſieurs manivelles, ſimples ou doubles, & chaque manivelle en faiſant un tour fait monter & redeſcendre un piſton.

II.

Le calcul, qu'on a fait ordinairement ſur ces ſortes de machines, ſe fonde ſur le principe: *que la force multipliée par le chemin qu'elle parcourt, eſt égale au poids qu'il faut lever, multiplié par le chemin qu'il parcourt en même tems.* Comme donc le chemin parcouru par la manivelle eſt la circonférence du cercle qu'elle décrit, & que le chemin parcouru par le piſton eſt le double diametre de ce cercle, on en infère, que le poids ou la force qui s'oppoſe au piſton, eſt à la force motrice réduite à la manivelle, comme la moitié de la circonférence du cercle à ſon diametre, ou comme 11 à 7, ou π à 2. L'inégalité avec laquelle le piſton monte ou deſcend, rend cette proportion extrémement variable, mais on s'eſt contenté de regarder comme moyenne celle que je viens de rapporter. Auſſi le calcul intégral fait voir qu'elle l'eſt ſurtout dans le cas, où au lieu d'une manivelle on en ſuppoſe une infinité également diſtribuées ſur la circonférence de l'eſſieu. Car dans ce cas il peut y avoir un équilibre perpétuel entre la force & le poids. Mais lorsqu'il n'y a qu'une ou deux manivelles, cet équilibre n'a lieu que pour quelque point de la circonférence. Or le principe ſur le lequel on s'eſt fondé ne regarde que les cas où il y a équilibre. Ainſi il ſemble, qu'il ceſſe d'être applicable dèsque l'équilibre n'exiſte pas. Du moins il faut prouver, qu'en prenant la force moyenne, telle que nous venons de dire, la différence du tems, dans lequel chaque excès de force ſe compenſe par un défaut équivalent, n'entre pas en ligne de compte, mais que les défauts & les excès de vîteſſe ſe compenſent également.

III.

On comprend ſans peine que cela demande un calcul plus détaillé Mr. *Kaeſtner* en a donné un eſſai dans le 5^{me}. Volume des nouveaux Commentaires de la Société R. des Sciences de Gœttingue, ſous le titre: *De velocitate vectis inflexi.* Il tâche de déterminer la loi des vîteſſes de la manivelle par la force motrice entant que cette force eſt modifiée par l'inertie & par l'obliquité de l'action. Mais outre qu'il fait abſtraction du double effet du frottement, il me ſemble, que l'inertie du poids que la manivelle fait monter ou deſcendre, doit être autrement évaluée. Enfin Mr. *Kaeſtner* ne fait ſon calcul que pour une manivelle ſimple, qui leve le poids en montant, & qui le laiſſe retomber en deſcendant, deſorte que dans ce dernier cas le poids aide la force motrice à accélerer le mouvement. Or c'eſt ce qui n'a pas lieu dans les machines hydrauliques. Car dans le cas des pompes aſpirantes le piſton porte & élève l'eau en montant. Mais en redeſcendant il ceſſe de la porter, ſa ſoupape étant ouverte, & l'eau repoſant entiérement ſur la baſe de la ſoupape inférieure qui pendant ce tems eſt fermée. Dans le cas des pompes foulantes, c'eſt en deſcendant que le piſton fait monter l'eau, & en remontant il ne fait qu'aſpirer de la nouvelle eau, ce qui ſe faiſant par la preſſion de l'air extérieur, le piſton ne porte que ſon propre poids. Cette grande inégalité fait qu'on employe ordinairement une manivelle double, c'eſt-à-dire deux manivelles diamétralement oppoſées l'une à l'autre; c'eſt afin que tandis que l'une fait monter ſon piſton, l'autre faſſe deſcendre le ſien. Parlà la force motrice conſerve plus d'égalité, & il eſt clair qu'elle devient encore plus égale, lorſqu'on employe des manivelles quadruples, ſextuples &c.

IV.

Tab. VI. Fig. 1. Je me contenterai d'examiner le cas où la manivelle eſt double, mais je le ferai enſorte qu'on puiſſe entrevoir ſans peine, ce qu'il y a à faire lorſqu'on employe des manivelles plus multipliées. Soit donc BC la manivelle tournant autour du centre C, desorte que $BC = CA$. Aux extrémités B, A soient attachées les perches BE, AD, qui font monter & descendre les pistons. Je représenterai la force mouvante par un poids L, qui descend en se dévidant d'une circonférence G, ensorte que faisant tourner la roue dentée F, il fasse en même tems tourner le pignon ou la lanterne S, & la manivelle AB. L'eau que les pistons font monter, de même que le poids des pistons & des perches, peut être considéré comme un poids concentré aux points A, B de la manivelle, mais simplement pendant que chacun de ces points se trouve dans le demi cercle HAW. On peut même faire abstraction du poids de la manivelle, des perches & des pistons, si à cet égard il y a équilibre de part & d'autre, comme cela doit être pour qu'il n'en résulte point d'inégalité pour la force motrice. Je ne considere donc simplement que le poids de l'eau, que les pistons font alternativement monter. A ce poids il faut ajouter celui qui est requis pour faire équilibre au frottement, que souffrent les perches & les pistons. Je l'ajoute au poids de l'eau, parceque l'effet de l'un & de l'autre varie suivant la différence des angles HCA. J'observerai encore que le poids de l'eau est variable entant qu'il s'en échappe toujours entre le piston & le cylindre de la pompe. Mais comme, surtout dans les cas où l'eau doit monter à une hauteur plusieurs fois plus grande que HW, cette variation est très petite en comparaison de toute la masse, je me bornerai à supposer une quantité moyenne, que je regarderai comme constante. Je dénoterai donc par Q la somme du poids moyen de l'eau qui monte, & de celui qui fait équilibre au frottement des pistons & des perches.

V.

Cette somme, que je considere comme concentrée au point A, doit être réduite au point G, où la force mouvante est appliquée comme à un levier KG. Posons pour cet effet les rayons

$$C\,A = r$$
$$C\,S = u\,r$$
$$K\,F = \vartheta\,r$$
$$K\,G = \lambda\,r$$

& l'angle

$$H\,C\,A = \psi$$

& le poids Q, réduit au point G, eſt

$$= Q.\ \text{ſin}\ \psi.\ \frac{\theta}{\lambda\,\mu}$$

Ce poids doit être ſouſtrait du poids L, que je poſerai $= P$, deſorte que le poids réſidu ſera

$$= P - Q.\ \text{ſin}\ \psi.\ \frac{\theta}{\lambda\,\mu}$$

Je ferai pour plus de briéveté

$$\frac{\theta}{\lambda\,\mu} = \varepsilon$$

deſorte que le poids réſidu ſera $= P - \varepsilon\ Q.\ \text{ſin}\ \psi.$ Lorsqu'il y a plus ou moins de roues la valeur de ε ſe déterminera de la même manière ſuivant les regles de la Statique.

VI.

Ce poids réſidu doit encore être diminué d'une quantité q, qui eſt dûe au frottement produit aux tourillons K, C, & aux dents en F, S, demême qu'aux eſſieux des balanciers, ſi les perches $B\,E$, $A\,D$ ne meuvent pas immédiatement les piſtons. On aura donc la force motrice

$$= P - q - \varepsilon\ Q.\ \text{ſin}\ \psi.$$

Voyons maintenant quelles ſont les maſſes, que cette force doit mettre en mouvement.

VII.

Il y a d'abord la maſſe de l'eau qui monte, & celle des deux piſtons & des deux perches. Tout cela doit être conſidéré comme concentré au point A, & comme devant parcourir le demi-cercle $H A$. Il y a de plus la masse de la manivelle $A B$, & de la roue S. Ensuite il y a encore celle de la roue F, de l'arbre G, & enfin du poids P, s'il y en a un en effet. Car quelques fois la machine est arrangée ensorte qu'on la fait tourner par des chevaux. D'autres fois la roue G est inclinée, & calquée par des chevaux ou des bœufs. D'autres fois encore c'est l'eau ou le vent dont on emprunte la force. Mais je ferai abstraction de ces diversités qui jetteroient dans un détail étranger au but de ce mémoire. Le poids P étant immédiatement appliqué au point G, sa masse reste telle qu'elle est. Quant aux autres masses elles doivent être réduites à ce point. Je puis supposer comme connue la manière dont se fait cette réduction. Il n'y a ici qu'un seul cas, qui demande quelque discussion. La masse concentrée en A se réduit au point G, lorsqu'on la multiplie par le quarré du rapport ε. Mr. *Kaestner* la multiplie encore par le quarré du $\sin \psi$; & c'est en quoi je suis d'un autre sentiment, parceque le poids de la masse fait, qu'elle doit être considérée comme concentrée au point de suspension A, non seulement entant qu'elle pese, mais aussi par rapport à son inertie. La masse de la manivelle, de même que celle de la roue B, doit pareillement être d'abord réduite au point A, & ensuite au point G. Je désignerai par M la somme de toutes ces masses réduites au point G.

VIII.

Ainsi donc nous aurons la force accéleratrice

$$= \frac{P - q - \varepsilon Q. \sin \psi}{M}$$

Or pendant que le point A parcourt le petit arc $r d\psi$, la force appliquée en G parcourt l'espace $r d\psi : \varepsilon$, & nommant h la hauteur dûe à la vitesse c de ce point G, on aura

$$dh = \frac{P - q - \varepsilon Q. \sin \psi}{M} \cdot \frac{r d\psi}{\varepsilon} = \frac{2 c dc}{4 g}$$

Cette formule auroit lieu si le frottement ne rallentissoit pas le mouvement.

mouvement. Ce rallentiſſement diminue l'élément dh d'une quantité proportionelle au quarré de la vîteſſe. C'eſt tout ce que j'en puis dire, tant d'après la théorie que d'après des expériences très-détaillées, que j'ai rapportées autre part. Dans les machines, que je conſidère dans ce mémoire, il y a deux ſortes de vîteſſes, qui varient fort différemment. L'une eſt celle du rouage, & l'autre celle des perches & des piſtons. Celle du rouage eſt toujours proportionelle à la vîteſſe c, qui eſt celle du point G. Or cette vîteſſe c étant miſe pour baſe, celle des points A, B ſera $= c : \varepsilon$, & celle des piſtons $= c . \sin\psi : \varepsilon$.

Suppoſons donc pour le piſton une vîteſſe W & une force B telle, que ſi le piſton a cette vîteſſe W, & qu'il eſt pouſſé par cette force B, la vîteſſe n'en ſoit ni augmentée ni diminuée, mais ſimplement conſervée. Ainſi donc la force B contrebalance le frottement en tant qu'il dérive de la vîteſſe W. Et comme cette force eſt en raiſon conſtante du quarré de la vîteſſe, il s'enſuit que la force requiſe pour contrebalancer l'effet du frottement dû à la vîteſſe $c \sin\psi : \varepsilon$, ſera

$$= \frac{B c^2 \int\psi^2}{\varepsilon^2 W^2}$$

En la réduiſant au point G elle devient

$$= \varepsilon . \sin\psi . \frac{B c^2 \int\psi^2}{\varepsilon^2 W^2} = \frac{B . \int\psi^3 c^2}{\varepsilon W^2}$$

Quant au rouage on ſuppoſera tout de même une force A & une vîteſſe V telle, que la force A étant appliquée au point G, & ce point ayant cette vîteſſe V, cette vîteſſe n'en ſoit ni augmentée ni diminuée. De cette manière la vîteſſe étant c, la force requiſe ſera

$$= \frac{A . c^2}{V^2}$$

& nous aurons

$$dh = \frac{2 c d c}{4 g} = \frac{P - q - \varepsilon Q . \int\psi - B \int\psi^3 c^2 : \varepsilon W^2 - A c^2 : V^2}{M} . \frac{r d\psi}{\varepsilon}$$

Et voilà la formule qu'il s'agiſſoit de trouver. Elle renferme les deux rapports

$$\frac{B}{W^2},\ \frac{A}{V^2}$$

qu'il n'y a guères moyen de déterminer autrement que par l'expérience. En faiſant $dc = 0$, on aura

$$P - q - \varepsilon Q ſ\psi = \left(\frac{B.\,ſ\psi^3}{\varepsilon\, W^2} + \frac{A}{V^2}\right).\, cc$$

Cette équation a lieu lorſque c eſt un *maximum* $= C$, ou un *minimum* $= G$. Nommant ω, ϕ les angles répondants, on aura les deux équations

$$P - q - \varepsilon Q.\, ſ\omega = \left(\frac{B.\,ſ\omega^3}{\varepsilon\, W^2} + \frac{A}{V^2}\right).\ CC$$

$$P - q - \varepsilon Q.\, ſ\phi = \left(\frac{B.\,ſ\phi^3}{\varepsilon\, W^2} + \frac{A}{V^2}\right).\ GG$$

par lesquelles on déterminera les rapports $B : W^2$, $A : V^2$, au moyen des vîteſſes C, G, & des angles ω, ϕ. Avec tout cela la formule eſt fort intraitable par rapport à l'intégration. On peut à la vérité ſéparer aiſément les variables, enſorte qu'on obtient l'intégrale

$$cc.\, e^{\frac{g\,r\,B}{\varepsilon\varepsilon\, M\, W\, W}\left(\frac{1}{3} coſ 3\psi - 3 coſ\psi\right) + \frac{4 g\, r\, A\, \psi}{\varepsilon\varepsilon\, M\, V\, V}} = \frac{4 g\, r}{\varepsilon\, M}.$$

$$S\,(P - q - \varepsilon\, Q ſ\psi).\left(e^{\frac{g\,r\,B}{\varepsilon\varepsilon\, M\, W W}\left(\frac{1}{3}coſ 3\psi - 3 coſ\psi\right) + \frac{4 g\, r\, A\, \psi}{\varepsilon\varepsilon\, M\, V\, V}}\right) d\psi$$

$+$ *Conſt.*

Mais c'eſt auſſi tout ce qu'on peut faire. Or il arrive ici, qu'en relâchant un peu de l'exacte rigueur, on peut ſe borner à une équation beaucoup plus ſimple

$$\frac{2\,c\,dc}{4\,g} = \left[\frac{P - q - \varepsilon\, Q ſ\psi}{M} - \frac{P - q - \varepsilon\, Q.\, ſ\omega}{M}\,.\,\frac{cc}{CC}\right]\frac{r\, d\psi}{\varepsilon}$$

$$= A : V^2 + B ſ\omega^3 : W^2$$

Comme dans l'equation différentielle

$$\frac{2cdc}{4g} = \frac{P - q - \varepsilon Q. \int \psi - B \int \psi^3 c^2 : \varepsilon W^2 - A c^2 : V^2}{M} \cdot \frac{r d\psi}{\varepsilon}$$

c'eſt la partie $\int \psi^3 . d\psi$ qui l'empêche d'être intégrable, & que l'effet qui en réſulte eſt aſſez petit, on pourra lui ſubſtituer une quantité $n d\psi$ telle, que la totalité de l'effet pour chaque demi-tour ſoit la même, ou bien que l'intégrale de $\mathit{ſin}\ \psi^3 . d\psi$ à commencer depuis $\psi = 0$ jusqu'a $\psi = 180°$, ſoit la même que celle de $n d\psi$. Or cela arrive lorsqu'on fait

$$n = \frac{4}{3\pi}$$

De cette manière on aura

$$\frac{2cdc}{4g} = \frac{P - q - \varepsilon Q. \int \psi - 4 B c^2 : 3\pi\varepsilon W^2 - A c^2 : V^2}{M} \cdot \frac{r d\psi}{\varepsilon}$$

Equation qui pour chaque demi-tour donnera la même totalité de l'effet, ſans que la variation de la vîteſſe d'un inſtant à l'autre ſoit conſidérablement altérée. Elle nous donne pour les cas de $dc = 0$, les deux équations

$$P - q - \varepsilon Q. \mathit{ſin}\, \omega = \left(\frac{4B}{3\pi\varepsilon W^2} + \frac{A}{V^2}\right) . C^2$$

$$P - q - \varepsilon Q. \mathit{ſin}\, \varphi = \left(\frac{4B}{3\pi\varepsilon W^2} + \frac{A}{V^2}\right) . G^2$$

La premiere de ces équations, qui virtuellement ſont une même équation, fournit la valeur

$$\frac{4B}{3\pi\varepsilon W^2} + \frac{A}{V^2} = \frac{P - q - \varepsilon Q. \mathit{ſin}\, \omega}{CC}$$

Cette valeur étant ſubſtituée dans l'équation différentielle, la change en

$$\frac{2cdc}{4g} = \left[\frac{P - q - \varepsilon Q\, \mathit{ſin}\, \psi}{M} - \frac{P - q - \varepsilon Q\, \mathit{ſin}\, \omega}{M} \cdot \frac{cc}{CC}\right] \frac{r d\psi}{\varepsilon}$$

Equation qui devient $= 0$, lorsque $\psi = \omega$, & $c = C$, tout de même que lorsque $\psi = \varphi$, & $c = G$.

IX.

Nous avons donc

$$2cdc + \frac{4gr(P-q-\varepsilon Q\,\sin\omega)}{\varepsilon MCC}.\,ccd\psi = \frac{4gr(P-q)}{\varepsilon M}.\,d\psi$$
$$-\frac{4grQ}{M}.\,\sin\psi\,d\psi$$

Et en faisant

$$\frac{4gr\,(P-q-\varepsilon\,Q\,\sin\omega)}{\varepsilon\,MCC} = k$$

$$\frac{4gr\,(P-q)}{\varepsilon\,M} = m$$

$$\frac{4grQ}{M} = n$$

on aura

$$kCC = m - n\sin\omega$$

&

$$2cdc + kccd\psi = md\psi - n\sin\psi.\,d\psi.$$

X.

Cette équation donne l'intégrale

$$cc = \frac{m}{k} + \frac{n}{1+kk}\,(\cos\psi - k\sin\psi) + A.\,e^{-k\psi}$$

où il s'agit de déterminer la conſtante A.

XI.

Comme le mouvement de la machine recommence un nouveau train après chaque demi-tour de la manivelle, l'angle ψ, après être devenu $= 180^\circ$, recommence à être $= 0$. C'eſt donc par demi-tour, que le mouvement de la machine doit être calculé. Soit après un nombre quelconque de demi-tours la vîteſſe v, on aura pour le commencement du demi-tour ſuivant, $\psi = 0$, $c = v$, ce qui donne

$$A = vv - \frac{m}{k} - \frac{n}{1+kk}$$

Donc pour un angle quelconque de ce demi-tour

$$cc = \frac{m}{k} + \frac{n}{1+kk}(\cos\psi - k\sin\psi) + \left(vv - \frac{m}{k} - \frac{n}{1+kk}\right).e^{-k\psi}$$

A la fin de ce demi-tour on a $\psi = \pi$, ce qui donne la vîtesse initiale pour le tour suivant

$$\grave{c}\grave{c} = \frac{m}{k} - \frac{n}{1+kk} + \left(vv - \frac{m}{k} - \frac{n}{1+kk}\right) e^{-k\pi}$$

XII.

Dans l'état de permanence chaque demi-tour recommence avec la même vîtesse. Cela donne $\grave{c} = v$, & par là on a

$$vv = \frac{\frac{m}{k} - \frac{n}{1+kk} - \left(\frac{m}{k} + \frac{n}{1+kk}\right) e^{-k\pi}}{1 - e^{-k\pi}}$$

Substituant cette valeur dans l'équation générale

$$cc = \frac{m}{k} + \frac{n}{1+kk}\cdot(\cos\psi - k\sin\psi) + \left(vv - \frac{m}{k} - \frac{n}{1+kk}\right).e^{-k\psi}$$

elle se transforme en

$$cc = \frac{m}{k} + \frac{n}{1+kk}(\cos\psi - k\sin\psi) - \frac{2n}{1+kk}\cdot\frac{e^{-k\psi}}{1 - e^{-k\pi}}$$

Et voilà l'équation, qui donne la vîtesse c répondante à un angle quelconque ψ de chaque demi-tour dans l'état de permanence.

XIII.

On comprend sans peine que si au lieu d'une double manivelle AB il y en a une quadruple en forme de croix, deux de ces manivelles seront toujours du côté montant, & que le mouvement recommencera un nouveau train après chaque quart de tour. C'eſt ce qu'il ſuffit d'avertir ici, pour faire entrevoir comment le calcul doit être arrangé. Si le nombre des manivelles eſt impair, le calcul ſera plus embarraſſant, parceque le nombre des manivelles du côté montant n'eſt pas toujours le même. Si p. ex. il y en a trois, le calcul ſera interrompu de 60 en 60 degrés, trois fois de ſuite avant qu'il revienne dans le même ordre.

XIV.

Dans l'équation

$$cc = \frac{m}{k} + \frac{n}{1+kk}(\cos\psi - k\sin\psi) - \frac{2n}{1+kk}\cdot\frac{e^{-k\psi}}{1-e^{-k\pi}}$$

La vîteſſe c peut devenir un *maximum* & un *minimum*. La différentiation fait voir que cela arrive lorsque $c = C$, &

$$0 = \sin\psi + k\cos\psi - 2k.\frac{e^{-k\psi}}{1-e^{-k\pi}}$$

Cette équation a deux racines plus petites que π. Celle pour le *maximum* de la vîteſſe ſoit $\psi = \omega$, & celle pour le *minimum* $\psi = \phi$, comme cy-deſſus. Et en faiſant pour plus de commodité $k = t\,\Lambda$ on aura

$$0 = \sin(\omega + \Lambda) - \frac{2.\sin\Lambda.\ e^{-\omega.t\Lambda}}{1-e^{-\pi t\Lambda}}$$

$$0 = \sin(\phi + \Lambda) - \frac{2.\sin\Lambda.\ e^{-\phi t\Lambda}}{1-e^{-\pi t\Lambda}}$$

Voici les valeurs de Φ & ω répondantes aux valeurs de Λ de 15 en 15 degrés:

Λ	$k = t\,\Lambda$	ω	Φ
0°	0,0000	39°. 32′	90° + 50°. 28′
15	0,2679	35. 26	90 + 46. 48
30	0,5774	30. 59	90 + 41. 31
45	1,0000	25. 42	90 + 35. 27
60	1,7321	18. 56	90 + 27. 6
75	3,7321	10. 10	90 + 14. 53
90	∞	0. 0	90 + 0. 0

Cette table suffit pour trouver les valeurs intermédiaires ω, φ, par interpolation.

XV.

Comme la valeur de k augmente lorsque le frottement est plus fort, par le retardement qu'il produit, elle se détermine par les circonstances & la construction de la machine, & pour une même machine elle peut varier d'un tems à l'autre. Lorsque l'effet du frottement est nul ou tant que nul, on a $k = 0$, & les angles de la plus grande & de la moindre vitesse sont $\omega = 39°.\ 32'$, $\Phi = 140°.\ 28'$. le sinus de l'un & l'autre de ces deux angles étant $= 2 : \pi$. La table fait voir que ces angles diminuent à mesure que le frottement produit plus de résistance, ensorte que cette résistance étant comme infinie, ω se réduit à 0, & Φ à 90°.

XVI.

Comme le quarré de la vitesse cc ne sauroit être négatif, on aura nécessairement $c > 0$, sans quoi la machine ne fera tout au plus que des oscillations. Ainsi le cas extrême de ceux où la machine tourne en effet, a lieu, lorsque la vîtesse $c = o$ répond à l'angle φ, qui est celui du *minimum* de la vîtesse. Cela donne

$$cc = o = \frac{m}{k} + \frac{n}{1+kk}(\cos\varphi - k\sin\varphi) - \frac{2n}{1+kk} \cdot \frac{e^{-k\varphi}}{1-e^{-k\pi}}$$

ou bien

$$o = m.\cot\Lambda + n.\cos\Lambda.\cos(\varphi+\Lambda) - 2n.\cos\Lambda^2.\frac{e^{-\varphi.t\Lambda}}{1-e^{-\pi t\Lambda}}$$

d'où suit

$$\frac{m}{n} = \frac{e^{-\varphi t\Lambda}\sin 2\Phi}{1-e^{-\pi.t\Lambda}} - \sin\Lambda.\cos(\Lambda+\varphi)$$

On a de plus

$$\frac{m}{n} = \frac{p-q}{\varepsilon Q}. \qquad CC = \frac{n}{k}.\left(\frac{m}{n} - \sin\omega\right)$$

Mettant donc pour Λ, φ, ω, les valeurs de la table précédente, on aura pour le rapport $\frac{m}{n}$, & pour celui de CC à n, les valeurs suivantes :

λ	$k = t\lambda$	$m : n = (P-q) : \varepsilon Q$	$CC : n$
0	0,0000	0,6366	0,4178
15	0,2679	0,6911	0,4155
30	0,5774	0,7492	0,4059
45	1,0000	0,8146	0,3809
60	1,7321	0,8902	0,3266
75	3,7321	0,9665	0,2589
90	∞	1,0000	0,0000

XVII.

XVII.

La valeur exacte de $m : n$, lorsque $\lambda = o$, eſt $=$ $\mathit{ſin}\ \omega = \frac{2}{\pi}$. On aura donc pour ce cas la proportion

$$Q : \frac{p - q}{\varepsilon} = 2 : \pi$$

laquelle eſt préciſement la même, que celle dont j'ai parlé dans le ſecond article de ce mémoire, & dont on s'eſt ſervi jusqu'à préſent. Si le frottement eſt abſolument nul, on aura $q = o$, ce qui ſimplifie encore cette analogie, en ce qu'elle devient

$$Q : \frac{p}{\varepsilon} = 2 : \pi$$

Mais ſi le frottement demande une force $= q$, pour qu'il ſoit levé ou vaincu, ſans qu'enſuite il influe dans la retardation du mouvement, notre analogie reſte telle qu'elle eſt. Elle a donc lieu dans l'un & l'autre de ces deux cas, toutes les fois que le *minimum* de la viteſſe eſt $= o$. Du reſte ces ſortes de cas doivent être évités, tant parcequ'il y a trop d'inégalité entre les viteſſes, que parceque la moindre cauſe accidentelle arrêteroit le mouvement, lorsqu'il eſt près de zero.

XVIII.

Comme donc il s'agit des cas, où le *minimum* de la viteſſe doit être une quantité finie, & que pour éviter la diſproportion entre ce *minimum* G & le *maximum* C, il eſt bon que ces deux viteſſes ne ſoyent pas fort différentes l'une de l'autre, on aura le choix de commencer par établir, quel doit être le rapport de G à C. Or nous avons les deux équations

$$CC = \frac{m}{k} + \frac{n}{1+kk}(\mathit{coſ}\,\omega - k\,\mathit{ſ}\,\omega) - \frac{2n}{1+kk}\cdot\frac{e^{-k\omega}}{1-e^{-k\pi}}$$

$$GG = \frac{m}{k} + \frac{n}{1+kk}(\mathit{coſ}\,\phi - k\,\mathit{ſ}\,\phi) - \frac{2n}{1+kk}\cdot\frac{e^{-k\phi}}{1-e^{-k\pi}}$$

De ces deux équations on déduit le rapport

$$\frac{m}{n} = \frac{P-q}{\varepsilon Q} = \frac{k}{1+kk} \cdot \frac{1}{C^2 - G^2} \cdot \Big[G^2 (\cos\omega - k \sin\omega) -$$

$$C^2 (\cos\varphi - k \sin\varphi) + 2. \frac{C^2 . e^{-k\varphi} - G^2 . e^{-k\omega}}{1 - e^{-k\pi}} - \Big]$$

XIX.

Ce rapport, pour les cas où $k = 0$, se réduit encore à

$$\frac{P-q}{\varepsilon Q} = \frac{2}{\pi}$$

de sorte que l'analogie, dont nous venons de parler (Art. XVII.), se trouve avoir généralement lieu, soit que le frottement soit absolument nul, ou que du moins il ne produise point de retardation sensible. Dans ces cas donc on peut établir, *que la force motrice $P - q$ multipliée par le chemin qu'elle parcourt, c'est-à-dire par le diametre AB, est égale au produit du poids Q multiplié par le chemin qu'il parcourt, c'est-à-dire par la demi-circonférence AWB.* Tout cela s'entend de l'état de permanence.

XX.

En remettant au lieu de k sa valeur *tang* Λ, le rapport $\frac{m}{n}$ se changera en

$$\frac{m}{n} = \frac{P-q}{\varepsilon Q} \Big[\frac{\sin(\omega + 2\Lambda) - \sin\omega}{2} - \frac{\sin 2\Lambda . e^{-\omega . t\Lambda}}{1 - e^{-\pi . t\Lambda}} \Big] . \frac{GG}{CC - GG}$$

$$- \Big[\frac{\sin(\varphi + 2\Lambda) - \sin\varphi}{2} - \frac{\sin 2\Lambda . e^{-\varphi . t\Lambda}}{1 - e^{-\pi . t\Lambda}} \Big] . \frac{CC}{CC - GG}$$

Par là on trouve

A	$\frac{m}{n} = \frac{P-q}{\varepsilon Q}$
0°	$(0,6366.\ C^2 - 0,6366.\ G^2) : (C^2 - G^2)$
15	$(0,6911.\ C^2 - 0,3085.\ G^2) : (C^2 - G^2)$
30	$(0,7492.\ C^2 - 0,3602.\ G^2) : (C^2 - G^2)$
45	$(0,8146.\ C^2 - 0,3337.\ G^2) : (C^2 - G^2)$
60	$(0,8902.\ C^2 - 0,4691.\ G^2) : (C^2 - G^2)$
75	$(0,9665.\ C^2 - 0,3373.\ G^2) : (C^2 - G^2)$
90	$(1,0000.\ C^2 -\ \ *\ \ ) : (C^2 - G^2)$

XXI.

Si donc p. ex. on fait $C^2 = 2.\ G^2$, on aura la table suivante:

A	$(P - q : \varepsilon Q$
0	0,6366
15	1,0737
30	1,1382
45	1,2853
60	1,3113
75	1,5957
90	2,0000

XXII.

Toutes ces expreſſions dépendent de la valeur de k, qui eſt (Art. IX.)

$$k = \frac{4gr}{\varepsilon M} \cdot \frac{P - q - \varepsilon Q . \sin\omega}{CC}$$

ou bien (Art. VIII.)

$$k = \frac{4gr}{\varepsilon M} \cdot \left(\frac{4B}{3\pi\varepsilon W^2} + \frac{A}{V^2} \right)$$

Cette valeur dépend donc des vîteſſes W, V, avec lesquelles le frottement fait équilibre aux forces B, A. Si le frottement eſt nul, les rapports

$$\frac{B}{W^2}, \ \frac{A}{V^2}$$

ſont $= 0$, ce qui fait $k = 0$, & on aura également $q = 0$.

XXIII.

On voit de plus, que la valeur de k augmente en raiſon directe du rayon de la manivelle, & en raiſon réciproque du rapport ε, de même que de la ſomme M des maſſes réduites au point G. Il convient cependant de remarquer, que ſi les maſſes augmentent, les rapports $\frac{B}{WW}$, $\frac{A}{VV}$ augmentent pareillement.

XXIV.

J'ai dit cy-deſſus, que ces rapports ne ſauroient encore être déterminés que par des expériences. Si on a l'occaſion d'en faire avec une machine toute conſtruite, la valeur de k peut être trouvée en obſervant les angles ω, ϕ, qui répondent à la plus grande & à la moindre vîteſſe. C'eſt à quoi ſervira la table que j'ai donnée dans le XIV^e. Art. On trouvera encore l'angle Λ, dont la tangente eſt $= k$, au moyen de la table (Art. XX.), ſi on connoit les rapports $C^2 : G^2$ & $(P - q) : \varepsilon Q$.

XXV.

Fig. II. Voicy maintenant un exemple. C'eſt une machine que a été conſtruite en effet. La ſeconde figure en fait voir les principales parties, quoique du reſte autrement placées qu'elles ne le ſont dans la machine elle même. *D E* eſt un plan circulaire fiché à angles droits dans un axe *A B* incliné vers l'horizon ſous un angle de $13\frac{1}{2}$ degrés. Le Diametre *D E* eſt de 40 pieds de Rhin. Les angles *D C F*, *F C G*, *G C H* ſont de 30 degrés chacun, & en *F*, *G*, *H* ſont placés trois couples de chevaux peſant environ 5300 livres. Le centre commun de gravité de chaque couple eſt éloigné de $17\frac{1}{2}$ pieds du centre *C*. Ces couples ſont attachés à une parois fixe *P P*, afin qu'en faiſant tourner la machine par leur poids ils ſoient obligés de remonter à meſure que le mouvement de la machine les fait deſcendre.

Sur le même axe *A B* eſt fichée à angles droits une roue en couronne *I*, qui a 136 dents ſur une circonférence de 18 pieds de diametre. Cette roue engraine dans une lanterne ou pignon *K*, de $4\frac{1}{2}$ pieds de diametre, & ayant 34 fuſeaux. Cette lanterne eſt couchée horizontalement, & fait tourner pluſieurs manivelles doubles, telle qu'eſt *L M*.

Ces manivelles en faiſant monter & baiſſer les piſtons *O*, *N* &c. de 9 pouces de diamètre, élèvent l'eau d'une profondeur de près de 90 pieds, enſorte que le poids de l'eau eſt d'environ 5200 livres, & le plan *D E* devroit tourner deux fois par minute. Le rayon des manivelles eſt $=$ 1 pied.

XXVI.

Ces données nous fourniſſent les calculs préliminaires que voicy. Les trois couples de chevaux marchent ſur un plan incliné, & le font tourner par leur poids. Or cette force agiſſant dans la direction verticale, doit être réduite à une autre, qui agiſſe dans la direction perpendiculaire aux rayons HC, GC, FC. On aura donc pour le couple

placé en	la force	
H.	$1760.\ \sin 13\tfrac{1}{2}°$	$= 410,9$ ℔
G.	$1760.\ \sin 13\tfrac{1}{2}.\ \cos 30°$	$= 355,8$
F.	$1760.\ \sin 13\tfrac{1}{2}.\ \cos 60°$	$= 205,4$
	Somme	$972,1$ ℔

Ainſi donc nous aurons

$$P = 972 \text{ ℔}.$$

Cette force P eſt cenſée être appliquée à la diſtance de $17\frac{1}{2}$ pieds de l'Axe AB.

XXVII.

Nous avons deplus pour le poids de l'eau que les piſtons font monter

$$Q = 5200 \text{ ℔}.$$

Pour le réduire au point où la force P eſt cenſée être appliquée, il faut d'abord le diminuer en raiſon du rayon du pignon K au rayon des manivelles, c'eſt-à-dire en raiſon de $2\frac{1}{4}$ pieds à 1 pied, ou bien en raiſon de 9 à 4. Enſuite il faut encore le diminuer en raiſon du rayon $HC = 17\frac{1}{2}$ pieds au rayon de la roue en couronne $= 9$ pieds, ou bien en raiſon de 35 à 18. Compoſant ces deux rapports, on obtient celui de 35 à 8, & cela donne

$$\frac{5200.\ 8}{35} = 1188 \text{ ℔}$$

De cette manière on a

$$\varepsilon = \frac{8}{35}$$

$$\varepsilon Q = 1188 \text{ ℔}.$$

XXVIII.

Appliquant d'abord ces valeurs à la formule (Art. XIX.)

$$P - {}'q = \frac{2\varepsilon Q}{\pi}$$

nous aurons

$$P - q = 756 \text{ lb}$$

Et comme

$$P = 972 \text{ lb}$$

il en réſulte

$$q = 216 \text{ lb}.$$

Voilà donc le ſurplus de force moyenne qu'il y auroit ſi le frottement n'y mettoit un double obſtacle.

XXIX.

Le rayon $H\ C = 17\frac{1}{2}$ pieds donne la circonférence $= 110$ pieds. Et cette circonférence faiſant deux tours par minute, donne une vîteſſe $= 3\frac{2}{3}$ pieds par ſeconde. C'eſt la vîteſſe moyenne des chevaux.

XXX.

Les maſſes à mouvoir réduites au point H (qui eſt cenſé être le même que le point G de la I. figure) ſont :

les poids abſolus des chevaux	=	5300 lb.
le poids $\varepsilon\,\varepsilon\,Q$ (Art. VII) . .	=	272 lb.
la maſſe de la machine environ	=	4000 lb.
La ſomme M. . .	=	9572 lb.

XXXI.

Ces valeurs étant ſubſtituées dans les équations (Art. IX.), donnent

$$k = \frac{27{,}77 - 0{,}02857 \cdot q - 33{,}94 \cdot \sin \omega}{C\,C}$$

$$m = 27{,}77 - 0{,}02857 \cdot q$$

$$n = 33{,}94 \cdot \sin \omega.$$

XXXII.

Si donc le frottement ne demandoit que la force q requiſe pour lui faire équilibre, on auroit $k = 0$, & par conséquent (Art. XIV.) $\omega = 39°. 32'$. Cela donneroit

$$n = 21{,}60$$

&

$$k = 0 = 27{,}77 - 0{,}02857 \cdot q - 21{,}60$$

d'où suivroit

$$q = 21{,}60 \text{ ℔}.$$

Or cette force est de beaucoup trop petite, parcequ'il faut faire tout au moins

$$q = 80 \text{ ℔}.$$

Il faut donc prendre $k > 0$, ce qui rendra l'angle ω plus petit.

XXXIII.

Posant donc $q = 80$ ℔, nous aurons

$$k = \frac{25{,}48 - 33{,}94 \cdot \sin \omega}{C\,C}$$

&

$$n = 33{,}94.$$
$$m = 25{,}48.$$
$$\frac{m}{n} = 0{,}7515$$

XXXIV.

La première de ces équations nous fait encore voir, que la position $k = 0$ ne sauroit avoir lieu. Car on auroit $\sin \omega = 0{,}7507$, & $\omega = 48°. 39'$, au lieu de $\omega = 39°. 32'$, que demande la table (Art. XIV.).

XXXV.

Réciproquément on ne sauroit faire $\Lambda > 30°$. Car pour $\Lambda = 30°$ la même table donne $k = 0{,}5774$, & $\omega = 30°. 59'$. Mettant ces valeurs dans l'équation (Art. XXXIII.)

$$k\,C\,C = 25{,}48 - 33{,}94 \sin \omega$$

on obtient $C\,C = 13{,}87$, $C = 3{,}72$ pieds.

Et

Et moyennant la table (Art. XX.),

$$G\,G = 0{,}08$$
$$G = 0{,}28$$

Ce *minimum* de la vîteſſe eſt ſi petit, que pour peu qu'on prenne $\Lambda = 30°$, le quarré $G\,G$ deviendra négatif, ce qui veut dire que la machine ne feroit que des oſcillations.

XXXVI.

Or en poſant $\Lambda = 15°$, on trouve de la même manière

$$C = 4{,}65 \text{ pieds}$$
$$G = 1{,}72.$$

Cela donne une vîteſſe moyenne d'environ 3 pieds, & par conſéquent un peu moins grande que celle qui étoit requiſe pour tenir les ſources à ſec, & qui devoit être de $3\frac{2}{3}$ pieds. Auſſi en effet la machine ayant été conſtruite, on ſe vit obligé de faire jouer quelques piſtons par d'autres moyens. Mais comme je n'en ſuis pas aſſez inſtruit, je fais abſtraction de tout détail ultérieur, n'ayant du reſte rapporté cet exemple, que pour en donner un quelque ce ſoit, afin de faire voir l'uſage des formules & des tables, que ce mémoire renferme.

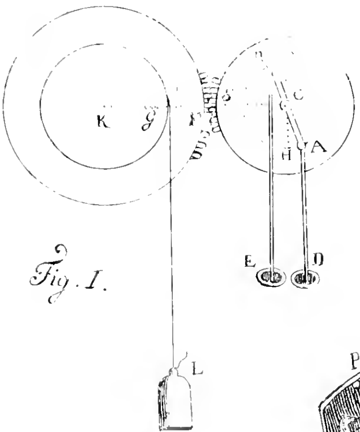

Fig. I.

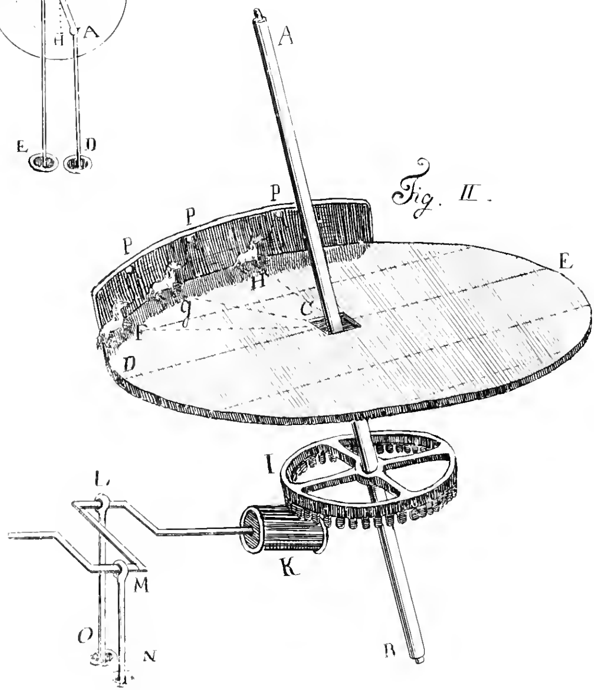

Fig. II.