eine ähnliche Art bestimmt werden. Die Potenzen von x in den vorigen Ausdrücken werden alsdenn selbst als Coefficienten angesehen, die in Potenzen der Einheit multiplicirt sind. In $P = a + b$, ist $\mu = \frac{b}{a+b}$. Man schreibe dafür $a + bx$, und $x = 1$; so ist, in $P^m = (a + bx)^m$, die Grösse $m\mu = \frac{mb}{a+b}$, der Exponent der Potenz von x, und also auch von *b*, für den **Mittelpunkt der Potenz** $(a + b)^m$.

4) Auch gilt der Satz für Polynomien in denen gebrochene Exponenten vorkommen. Und so läßt sich auch leicht einsehen, daß Potenzen mit verneinenden Exponenten vorkommen können. Daß also der Satz schlechthin bey allen Polynomien anwendbar sey.

IV.

Ueber die Mehrheit der Wurzeln höherer Gleichungen. Von Joh. Heinr. Lambert.

§. 1.

Man setzt sich bey Auflösung algebraischer Aufgaben überhaupt vor, den Werth einer unbekannten Grösse den vorgegebenen Bedingungen gemäß zu bestimmen; und gewöhnlich stellt man sich diese Grösse, so unbekannt sie auch seyn mag, eben so vor, und rechnet damit eben so, als wenn man sie bereits gefunden hätte.

Man

Man gedenkt sich dabey immer nur eine Grösse, und zwar diejenige, die man eigentlich suchen will. Findet es sich nun, daß die Gleichung, so man herausbringt, vom zweyten oder von einem noch höhern Grade ist: so trägt sichs oft zu, daß sie zwo und mehrere reelle Wurzeln hat. Und da diese sämtlich den vorgegebenen Bedingungen Genüge leisten: so findet man sich zuweilen dadurch irre gemacht, daß man nicht weiß, welche von diesen Wurzeln diejenige ist, die man eigentlich zu finden vorhatte, und die man sich währender Rechnung immer als die zu suchende Grösse dachte. Es ist klar, daß man in solchen Fällen mehr ausrechnet, als man ausrechnen wollte; und dieses ist besonders alsdann von Erheblichkeit, wo es nicht gleichgültig ist, welche Wurzel man gebrauchen will. So z. E. sind alle in der Welt vorkommende Grössen bestimmt. Wenn man demnach, um sie zu berechnen, auf höhere Gleichungen verfällt: so mag man immer alle ihre Wurzeln aufsuchen, und man wird dennoch nur Eine davon brauchen können; und dieses ist diejenige, welche der gesuchten Grösse, so wie diese in der Welt vorkömmt, gleich ist.

§. 2. Was nun hiebey als ein Fehler angesehen werden könnte, liegt nicht an der Algebra. Man hat es im Gegentheil immer als einen Beweis ihrer Vollkommenheit angerühmt, daß sie genauer und richtiger antwortet, als man sie zuweilen befragt. Der Fehler liegt eigentlich darin, daß man sich einbildet, eine Grösse sey **durchaus bestimmt**, wenn man die Aufgabe zur Gleichung gebracht hat. Dieses ist im eigentlichsten Verstande nur alsdann genau wahr, wenn die Gleichung vom **ersten Grade** ist. In jeden andern Fällen giebt es Einschränkungen.

§. 3. Die Analysis der Alten fieng eben so, wie nachgehends die Algeber, bey Gleichungen vom ersten

Grade

Grade an; und da gewöhnte man sich, eine Aufgabe als durchaus bestimmt anzusehen, wenn sie sich auf eine Gleichung bringen ließ. Diese Gewohnheit wurde beybehalten, auch nachdem man Aufgaben vom zweyten und höhern Graden vorzunehmen anfieng; so sehr auch die Algeber zeigte, daß solche Gleichungen die gesuchte Grösse nicht genug bestimmen.

§. 4. Wir können daher Gleichungen, die vom zweyten oder von noch höhern Graden sind, in dieser Absicht als ein **Mitteldinq** zwischen **bestimmten** und **unbestimmten** oder **diophantischen** Aufgaben ansehen. Solche Gleichungen bestimmen die gesuchte Grösse nicht durchaus; sondern sie geben zween oder auch mehrere Werthe an, und man will damit nur so viel, daß Einer derselben der gesuchten Grösse gleich ist. Daher ist es auch schon eingeführt, daß man sagt, **es müsse aus andern Umständen bestimmt werden, welche Wurzel die eigentlich gesuchte sey.** Diese **andern Umstände** sind nun von sehr verschiedener und zuweilen von ganz besondrer Art. Einige Beyspiele, die mich auf die Sache etwas mehr aufmerksam machten, zeigten mir, daß es eben nicht unerheblich ist, darüber nachzudenken. Ich werde die verschiedenen Erscheinungen, die sich hiebey zeigen, vorerst anführen, und Kürze halber nur Gleichungen vom zweyten Grade vornehmen.

§. 5. Der leichteste Fall ist gewöhnlich der, wo die eine Wurzel positiv, die andre negativ ist. Denn da man bey der Rechnung gemeiniglich die positive Wurzel im Sinne hat, oder die gesuchte Grösse als eine positive Grösse behandelt: so läßt es sich leicht erkennen, daß man die negative nicht gebraucht; zumal wenn dadurch der ganze Sinn der Aufgabe geändert wird, so daß an statt wirklicher Kapitalien nur Schulden, an statt des Steigens das Fallen, an statt des Fortrückens das Zu-rücktreten, ꝛc. herauskommen würde. Es giebt indessen dennoch Fälle, wo man die negative Wurzel nehmen muß, so sehr man auch die gesuchte Größe als eine positive Größe angesehen und behandelt hat. Man sieht aber leicht, daß dieses vornämlich nur alsdann geschieht, wo man nicht voraussehen kann, auf welche Seite von o die gesuchte Größe fallen wird.

§. 6. Sind beyde Wurzeln positiv: so kömmt die Frage überhaupt darauf an, ob man die grössere oder die kleinere zu suchen hatte. Gewöhnlich ist es die kleinere. Die allgemeine Formel für diesen Fall ist

$$x = a \pm \sqrt{(a^2 - b^2)}.$$

Und man sieht, daß es genug ist, wenn man nur überhaupt weiß, ob x grösser oder kleiner als a seyn soll. Im ersten Fall nimmt man

$$x = a + \sqrt{(a^2 - b^2)};$$

im andern aber

$$x = a - \sqrt{(a^2 - b^2)}.$$

Läßt sich dieses entscheiden: so ist es im eigentlichsten Verstande eine **Bedingung**, die in **der Aufgabe selbst** liegt, die man aber nicht gleich Anfangs in die Rechnung gezogen, und die folglich erst nach vollendeter Auflösung in Betrachtung kömmt. Da nun eine solche Bedingung die Aufgabe vollends bestimmt: so ist es im Grunde eben so viel, als wenn sie vom ersten Grade wäre. Man sieht leicht, daß man auf solche Bedingungen Acht haben muß, wenn man, ohne mehrere Data anzunehmen, die gesuchte Größe auf eine durchaus bestimmte Art finden will. Da aber solche Bedingungen unter mehrern Gestalten in der Aufgabe versteckt liegen: so werde ich zur Erläuterung einige Beyspiele anführen, und so auch mich auf diejenigen beziehen, die **Clairaut** im zweyten Theil seiner Algeber vorgebracht.

Grade an; und da gewöhnte man sich, eine Aufgabe als durchaus bestimmt anzusehen, wenn sie sich auf eine Gleichung bringen ließ. Diese Gewohnheit wurde beybehalten, auch nachdem man Aufgaben vom zweyten und höhern Graden vorzunehmen anfieng; so sehr auch die Algeber zeigte, daß solche Gleichungen die gesuchte Grösse nicht genug bestimmen.

§. 4. Wir können daher Gleichungen, die vom zweyten oder von noch höhern Graden sind, in dieser Absicht als ein **Mittelding** zwischen **bestimmten** und **unbestimmten** oder **diophantischen** Aufgaben ansehen. Solche Gleichungen bestimmen die gesuchte Grösse nicht durchaus; sondern sie geben zween oder auch mehrere Werthe an, und man will damit nur so viel, daß Einer derselben der gesuchten Grösse gleich ist. Daher ist es auch schon eingeführt, daß man sagt, **es müsse aus andern Umständen bestimmt werden, welche Wurzel die eigentlich gesuchte sey.** Diese **andern Umstände** sind nun von sehr verschiedener und zuweilen von ganz besondrer Art. Einige Beyspiele, die mich auf die Sache etwas mehr aufmerksam machten, zeigten mir, daß es eben nicht unerheblich ist, darüber nachzudenken. Ich werde die verschiedenen Erscheinungen, die sich hiebey zeigen, vorerst anführen, und Kürze halber nur Gleichungen vom zweyten Grade vornehmen.

§. 5. Der leichteste Fall ist gewöhnlich der, wo die eine Wurzel positiv, die andre negativ ist. Denn da man bey der Rechnung gemeiniglich die positive Wurzel im Sinne hat, oder die gesuchte Grösse als eine positive Grösse behandelt: so läßt es sich leicht erkennen, daß man die negative nicht gebraucht; zumal wenn dadurch der ganze Sinn der Aufgabe geändert wird, so daß an statt wirklicher Kapitalien nur Schulden, an statt des Steigens das Fallen, an statt des Fortrückens das Zu-rücktreten, ꝛc. herauskommen würde. Es giebt indessen dennoch Fälle, wo man die negative Wurzel nehmen muß, so sehr man auch die gesuchte Größe als eine positive Größe angesehen und behandelt hat. Man sieht aber leicht, daß dieses vornämlich nur alsdann geschieht, wo man nicht voraussehen kann, auf welche Seite von 0 die gesuchte Größe fallen wird.

§. 6. Sind beyde Wurzeln positiv: so kömmt die Frage überhaupt darauf an, ob man die grössere oder die kleinere zu suchen hatte. Gewöhnlich ist es die kleinere. Die allgemeine Formel für diesen Fall ist

$$x = a \pm \sqrt{(a^2 - b^2)}.$$

Und man sieht, daß es genug ist, wenn man nur überhaupt weiß, ob x grösser oder kleiner als a seyn soll. Im ersten Fall nimmt man

$$x = a + \sqrt{(a^2 - b^2)};$$

im andern aber

$$x = a - \sqrt{(a^2 - b^2)}.$$

Läßt sich dieses entscheiden: so ist es im eigentlichsten Verstande eine **Bedingung**, die in **der Aufgabe selbst** liegt, die man aber nicht gleich Anfangs in die Rechnung gezogen, und die folglich erst nach vollendeter Auflösung in Betrachtung kömmt. Da nun eine solche Bedingung die Aufgabe vollends bestimmt: so ist es im Grunde eben so viel, als wenn sie vom ersten Grade wäre. Man sieht leicht, daß man auf solche Bedingungen Acht haben muß, wenn man, ohne mehrere Data anzunehmen, die gesuchte Größe auf eine durchaus bestimmte Art finden will. Da aber solche Bedingungen unter mehrern Gestalten in der Aufgabe versteckt liegen: so werde ich zur Erläuterung einige Beyspiele anführen, und so auch mich auf diejenigen beziehen, die **Clairaut** im zweyten Theil seiner Algeber vorgebracht.

§. 7. Man habe die Gleichung

$$\sin\omega^2 - 2\sin\omega + \cos\lambda^2 = 0.$$

So findet sich

$$\sin\omega = 1 \pm \sqrt{(1 - \cos\lambda^2)},$$

oder

$$\sin\omega = 1 \pm \sin\lambda.$$

Nun kann kein Sinus grösser als der größte Sinus oder der Halbmesser = 1 seyn. Demnach muß hier nothwendig

$$\sin\omega = 1 - \sin\lambda$$

genommen werden. Die Bedingung der Aufgabe, wodurch die eigentlich gesuchte Wurzel kenntlich wird, liegt demnach darin, daß die gesuchte Größe ein Sinus eines Cirkelbogens seyn soll, dessen Halbmesser = 1 ist.

§. 8. Man setze wiederum, es sey oben in einem Barometer etwas Luft: so ist bekannt, daß das Quecksilber tiefer stehet, als es eigentlich stehen sollte. Legt man das Barometer horizontal: so wird die oben befindliche Luft so dichte wie die äussere Luft. Und da sie zugleich hindert, daß das Quecksilber nicht bis ganz oben an die Röhre kommen kann: so bleibt zwischen dem Quecksilber und dem Ende der Röhre ein leer scheinender Raum, dessen Länge wir = c setzen wollen. Der Druck der äussern Luft, oder die Höhe, so das Quecksilber haben sollte, sey = A; die Höhe, so es wirklich hat, = x; und die ganze Höhe, bis oben an die Röhre, = L: So giebt der Mariottische Satz vom Gesetze der Ausdehnung der Luft folgende Analogie:

$$(A - x) : A = c : (L - x).$$

Und hieraus folgt

$$x = \tfrac{1}{2}(L + A) \pm \sqrt{[Ac + \tfrac{1}{4}(L - A)^2]}.$$

Hier sind beyde Wurzeln positiv, weil

$$x = \tfrac{1}{2}(L + A) \pm \sqrt{[\tfrac{1}{4}(L + A)^2 - A.(L - c)]}.$$

ist. Fragt man nun, welcher Werth von x die wirkliche Höhe des Quecksilbers ausdrücke: so findet sichs, daß man die kleinere Wurzel nehmen müsse. Denn die grössere Wurzel ist grösser als L; und so müßte das Quecksilber bis über die Röhre hinauf stehen; welches nicht angeht, weil die Röhre oben geschlossen ist. Hier ist demnach die Bedingung, die in der Aufgabe liegt, und wodurch die Wahl der Wurzel entschieden wird. Diese Bedingung wurde nun schon dadurch in die Rechnung gezogen, daß man sowohl A — x, als L — x, als positiv ansah. Sie fällt aber bey der völlig aufgelösten Gleichung mehr in die Augen, weil sie sich zur Bestimmung, welche Wurzel genommen werden muß, nothwendig macht. Indessen erhellet aus diesem Beyspiele, daß man auch nach Auflösung der Gleichung auf die Rechnung zurücke sehen, und aus der Vergleichung der gefundenen Wurzeln mit den gegebenen Grössen erörtern kann, welche Wurzel man eigentlich berechnet hatte, oder zu berechnen vorhatte.

§. 9. Aus diesen beyden Beyspielen erhellet ferner, daß diejenige Wurzel, die man nicht suchte, in der Sache selbst ganz fremde ist, und daher nicht von der Sache, sondern von der Rechnung herrührt; sofern nämlich in der Rechnung nicht alle Bedingungen der Aufgabe mitgenommen worden. Sie rührt aber auch deswegen von der Rechnung her, weil man allemal, so ofte + x mit + x multiplicirt wird, ohne daran zu denken, auch eine Multiplikation von — x mit — x vornimmt, die man eigentlich nicht vornehmen wollte *). Diese zwote Multiplika-

*) So z. E. ist im letztern Beyspiel §. 8. das Produkt $Ac = AL - (L + A)x + x^2$ nicht allein $= (A - x).$

tiplikation aber folgt der ersten, wie der Schatten dem Lichte nach, und man nimmt immer beyde zugleich vor.

§. 10. Zuweilen geschieht es, daß, wenn man zwo unbekannte Grössen sucht, und für die eine derselben eine Quadratgleichung erhält, die beyden Wurzeln dieser Gleichung die beyden gesuchten Grössen sind. So z. E. wenn von zwo Grössen x, y, ihre Summe $= a$, und die Summe ihrer Quadrate $= b$ ist: so hat man die beyden Gleichungen

$$x + y = a.$$
$$x^2 + y^2 = b.$$

Wird die letztere doppelt genommen, und davon das Quadrat der erstern abgezogen: so bleibt

$$x^2 - 2xy + y^2 = 2b - a^2).$$

Demnach $x - y = \pm \sqrt{}(2b - a^2.$

Da nun $x + y = a$

ist: so findet sich, wenn man addirt,

$$2x = a \pm \sqrt{}(2b - a^2);$$

und so auch, wenn man subtrahirt,

$$2y = a \mp \sqrt{}(2b - a^2).$$

Man muß aber auch hier wissen, ob für x oder für y die grössere oder die kleinere Wurzel zu nehmen ist. Dieses ist nur in der Rechnung gleichgültig. In vorkommenden besondern Fällen aber hat man allerdings darauf zu sehen. *)

$(L - x)$, sondern auch $= (x - A).(x - L)$, oder $= -(A - x). -(L - x)$.

*) Mir däucht, in gegenwärtigem Falle ists auch in der Anwendung ganz gleichgültig, welche Wurzel für x oder y man nehmen wolle; weil zwo unbekannte Grös-

Grössen gesucht werden, und die Gleichung ebenfalls gerade zween Werthe giebt. Gleiche Bewandtniß hat es, glaube ich, mit allen denen Aufgaben, die eine Gleichung von so vielen Graden geben, als man unbekannte Grössen zu suchen hat. Man soll z. E. drey Grössen x, y, Z finden, deren Summe = a, die Summe ihrer Quadrate = b, und ihr Produkt = c, gegeben sind: So hat man die drey Gleichungen

$$y + Z = a - x.$$
$$y^2 + Z^2 = b - x^2.$$
$$yZ = \frac{c}{x}.$$

Subtrahirt man nun die zwote Gleichung von dem Quadrat der ersten; so erhält man den doppelten Werth der dritten; oder es wird

$$2yZ = (a^2 - b) - 2ax + 2x^2 = \frac{2c}{x}.$$

Dieses giebt

$$x^3 - ax^2 + \tfrac{1}{2}(a^2 - b)x - c = 0.$$

Und die drey Wurzeln dieser Gleichung werden die gesuchten drey Grössen seyn.

Uebrigens sieht man, daß diese Materie kurz abgebrochen ist; und Lambert mag wohl noch mehr darüber zu sagen gehabt haben. Wirklich hatte er auch diesem Aufsatz ein Paar Zetteichen beygelegt, worauf noch folgende Fälle und Anmerkungen notirt waren: *)

Casus, wo die eine Wurzel ein gegebener Punkt ist.
Casus, wo die Construktion vom ersten, der Calcul von höhern Graden ist.
Casus, wo man fehlerhaft auf höhere Grade kömmt; z. E. auf halbe Winkel, an statt auf ganze. ꝛc.

*) Hr. Oberfinanzbuchhalter Oberreit in Dresden hat Lamberts Aufsatz zum Druck ins reine geschrieben und diesen Zusatz beygefügt. B.