Wird hier durchgehends $n = 1$ gesetzt: so kommen lauter Gleichungen zum Vorschein, die dem Cirkel zugehören, und von ihm abhängen. Daraus folgt dann, daß alle Geschlechter unsrer Eylinien, die durch

$$(x^2 + y^2)^n = a\, x^{2n-1}$$

ausgedrückt werden können, aus der Familie der Cirkel herstammen.

Werden hingegen die Ordinaten $PM = QN$ (in der 3ten Figur,) weiter hin, nach B zu gerückt, so daß die Abcissen der krummen Linie mit den Abscissen des Cirkels in Einen Punkt treffen: so entstehet, statt einer Eylinie, eine im Anfang zugespitzte und beym Ende abgerundete birnförmige Linie, wie besagte dritte Figur zeigt; und die Gleichung für dieselbe verwandelt sich in

$$a^2y^2 = (ax - xx).xx.$$

VI.

Die Differential- und Integral-Rechnung endlicher Größen, *) von Johann Heinrich Lambert.

§. 1.

In der Infinitesimal-Rechnung wird überhaupt die unendlich kleine Zunahme veränderlicher Grössen, nebst ihren Verhältnissen betrachtet. In so

*) Oder der Calculus differentialis ac integralis quantitatum discretarum seu finitarum, wovon Lambert Erwähnung thut in einem Paar Briefen an Holland; im 1sten Bande des deutschen Briefwechsels, Seite 53 und

so ferne man aus diesen jene sucht: so kömmt die Differential-Rechnung dabey vor. Hingegen beschäfftigt sich die Integral-Rechnung damit, daß sie zeigt, wie man aus der unendlich kleinen Zunahme die veränderliche Größe selbst finden soll. Diese beyden Rechnungen werden auf unzählige Fälle angewandt; und es ist ausgemacht, daß man ohne dieselben in der Naturlehre die wichtigsten Stücke nicht würde herausbringen können, weil es da ungleich leichter ist, das Gesetz einer Veränderung in ihrer unendlich kleinen Zunahme, als in der Summe aller Veränderungen zu finden. Man muß ohne dieß bey neuen Erfindungen die Regel immer vor Augen haben, daß man die Sache gleich Anfangs in ihre Theile zerlegen und jeden Theil besonders betrachten soll. Diese Regel wird nirgends genauer als bey der Infinitesimal-Rechnung beobachtet, weil sie diese Zergliederung bis aufs Unendlichkleine treibt, und zeigt, wie man das, was man dabey auf eine sehr leichte Art findet, mit vollkommener Richtigkeit auf das Ganze bringen könne.

§. 2.

Diese Rechnung aber ist nur ein Theil von einer viel allgemeinern, und zugleich von einer ungleich schwerern und weitläuftigern, die wir hier zu betrachten vorgenommen haben. Diese betrachtet die Zunahme der veränderlichen Größen nicht als unendlich klein, sondern als geendet, und mit diesen

und 95. Diese Anmerkung ist von dem Herrn Ober-Finanz-Buchhalter Oberreit, welcher die Mühe genommen, diesen Aufsatz zum Druck abzuschreiben, und den Zusatz am Ende, aus den ihm mitgetheilten Papieren beygefügt hat.

B.

sen selbsten vergleichbar; und dadurch fallen alle Abkürzungen der Rechnung weg, die man bey jener mit so großem Vortheile gebraucht.

§. 3.

Ungeachtet es in der That keine Größe giebt, die sich sprungsweise verändert, und von einer Stufe zur andern nicht durch alle Mittelstufen gienge: so kann man sich doch solche Größen vorstellen; und diese Vorstellung hat in unzähligen Fällen ihren Nutzen. Dahin gehören überhaupt alle Reihen von Zahlen, die man nur gedenken kann; und aus gleichem Grunde alle Observationen, die man unterbrochen anstellen muß. Man kann eine Jede derselben, und überhaupt jede Glieder einer Reihe, als Größen ansehen, von welchen eine jede folgende aus der vorhergehenden entspringt; weil sie in der That eine solche Verbindung mit einander haben, daß man jedes folgende Glied aus dem nächst vorhergehenden finden kann. Eine Reihe ist nicht bloß eine Anzahl von Größen oder Gliedern; sondern es gehört ein Gesetz dazu, nach welchem die Glieder auf einander folgen, und einander bestimmen.

§. 4.

Hat man eine solche Reihe von Größen vor sich: so ist das leichteste und das gewöhnlichste, daß man die auf einander folgenden Glieder von einander abzieht, um zu sehen, wie ihre Differenzen aussehen. Hiedurch erhält man eine andre Reihe; und man nennt sie die **ersten Differenzen**. Werden auch diese von einander abgezogen: so erhält man die **zweiten Differenzen**; aus diesen die dritten; u. s. w.

§. 5.

§. 5.

Diese Verrichtung mag im eigentlichsten Verstande das **Differentiiren** heißen. Wenn die Glieder der ersten Reihe nach einem gewissen Gesetze auf einander folgen: so haben auch die andern Reihen, die man auf diese Art daraus findet, jede ihr besonderes Gesetz. Dieses kann auf sehr vielerley Art anders bestimmt werden; z. E. in so fern man dadurch nur anzeigt, wie jedes Glied aus dem unmittelbar vorhergehenden entspringt. Die brauchbarste Art ist aber folgende:

§. 6.

Man setzt in der Reihe irgendwo einen Anfang; und von dem Gliede an werden die übrigen schlechthin abgezählt, damit man jedes folgende Glied, als das **wievielte**, angeben könne. Die Zahl selbst, wodurch dieses angezeigt wird, heißt der Index; und durch diesen sucht man das Gesetz der Reihe auszudrücken. Es seyn z. E.

die Glieder A, B, C, D, ... N;
die Anzahl 1, 2, 3, 4, ... n.

Kann man nun das unbestimmte Glied N durch seinen ebenfalls unbestimmten Zeiger n angeben: so ist das Gesetz der Reihe gefunden; und das Glied N, auf diese Art ausgedrückt, wird der Terminus generalis genennt. Wir können es das allgemeine Glied, oder schlechthin das G e s e t z d e r R e i h e heißen.

§. 7.

Soll diese Betrachtung allgemeiner gemacht werden: so kann man sich vorstellen, als wenn der Anfang der Reihe unbestimmt wäre, und nicht alle Glieder, sondern sprungsweise das m te Glied herausgenommen würde.

Es seyn z. E.

die Glieder	A,	B,	C,	D, ...	P.
ihr Zeiger	x,	$x+m$,	$x+2m$,	$x+3m$, ...	$x+pm$.

§. 8.

Es ist klar, daß diese Vorstellungsart noch allgemeiner wird, wenn man die Zahlen x und m veränderlich setzt. Wir werden sie aber hier nur als unbestimmt ansehen, weil dieses schon zureichend ist, die Lehrsätze schwer genug zu machen.

§. 9.

Da also das $x$te Glied der Reihe eines seyn kann, welches man will: so sieht man das Glied selbsten als eine Function von x an, weil es dadurch muß können bestimmt werden. Wenn sich demnach x, der Ordnung nach, in $x+m$, $x+2m$, $x+3m$, verändert: so verändert sich auch seine Function; und aus dem Gliede A verwandelt sie sich in die Glieder B, C, D, etc. welche alle nach einem *gleichen* Gesetze aus den Zeigern x, $x+m$, $x+2m$, etc. bestimmt werden.

§. 10.

Um hierinn Euler zu folgen, welcher diese Rechnungsart zum Grunde der Infinitesimal-Rechnung gelegt hat, wollen wir bey seinen Benennungen bleiben. Man nenne demnach

Die Zeiger	x,	$x+m$,	$x+2m$,	$x+3m$,	$x+4m$, etc.
die Functionen	y,	y',	y'',	y''',	y^{IV}, etc.
ihre ersten Differenzen	Δy,	$\Delta y'$,	$\Delta y''$,	$\Delta y'''$,	etc.
Die zwoten Differenzen	$\Delta'' y$,	$\Delta'' y'$,	$\Delta'' y''$,	etc.	
Die dritten Differenzen	$\Delta''' y$,	$\Delta''' y'$,	etc.		
Die vierten Differenzen	$\Delta^{IV} y$,	etc.			
etc.					

so

so daß
$$\begin{aligned} \Delta y &= y' - y, \\ \Delta'' y &= \Delta y' - \Delta y, \\ \Delta''' y &= \Delta'' y' - \Delta'' y, \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

sey, und die Exponenten, so hier über dem Δ und y stehen, nicht die Dignitäten, sondern nur die Ordnung der Differenzen und Functionen, anzeigen, und z. E. $\Delta^{\mathrm{IV}} y'''$ nichts anders als die vierte Stelle in der Reihe der vierten Differenzen anzeige.

§. 11.

Die Rechnung, die hiebey vorkömmt, ist gedoppelt. Denn entweder ist die Function y durch x gegeben; und da sucht man jede Differenzen. Oder die Differenzen sind nach einem allgemeinen Gesetze durch x ausgedrückt; und da sucht man die Function. Im ersten Falle differentiirt man; im andern aber wird die Differenz integrirt, und die ganze Function wieder hergestellt oder gefunden.

§. 12.

Das Differentiiren ist demnach hier so viel als finden, um wieviel eine Function von x grösser oder kleiner wird, wenn man x um die Zahl m vergrössert. Die Zunahme oder Abnahme von der Function y, die man dadurch findet, und die wir überhaupt durch Δy andeuten, heißt das Differential. Da ferner jedes Differential wiedrum als eine Function von x angesehen werden kann: so ist klar, daß man das Differentiiren dabey fortsetzen, und daher auf eben die Art die zweyten, dritten etc. Differentialien finden kann, die wir durch $\Delta'' y$, $\Delta''' y$, etc. ausgedrückt haben.

§. 13.

Diese Rechnung hat überhaupt keine Schwierigkeit. Denn wenn die Function y durch x wirklich gegeben ist: so darf man nur in derselben $x+m$, $x+2m$, etc. für x setzen; und man findet die entsprechenden Functionen y', y'', y''', etc. Zieht man diese von einander ab: so findet man die gesuchten Differenzialien:

$\Delta y = y' - y$. Und so auch $\Delta'' y = \Delta y' - \Delta y$.
$\Delta y' = y'' - y'$. $\Delta'' y' = \Delta y'' - \Delta y'$.
$\Delta y'' = y''' - y''$. $\Delta'' y'' = \Delta y''' - \Delta y''$.
etc. etc.

§. 14.

Es sey z. E. $y = x^3$. Wird nun $x + m$ für x gesetzt: so ist $y' = x^3 + 3mx^2 + 3m^2x + m^3$.
folglich $\Delta y = 3mx^2 + 3m^2x + m^3$.
Eben so, wenn man $x + 2m$ für x setzt, findet man $y'' = x^3 + 6mx^2 + 12m^2x + 8m^3$.
Folglich $\Delta y' = 3mx^2 + 9m^2x + 7m^3$.
Daher $\Delta'' y = 6m^2x + 6m^3 = 6m^2.(x+m)$.
Diesen Werth würde man auch gefunden haben, wenn man in dem ersten Differential

$$\Delta y = 3mx^2 + 3m^2x + m^3.$$

$x+m$ für x gesetzt, und von dem herauskommenden $\Delta y' = 3mx^2 + 9m^2x + 7m^3$ wiederum Δy abgezogen hätte.

§. 15.

Wiederum, wenn die Function $y = 1 : x$ ist: so hat man

$$y' = 1 : (x + m).$$

Daher

Daher $y' - y = \frac{1}{x+m} - \frac{1}{x} =$

$$- \frac{m}{x.(x+m)}.$$

Folglich das erste Differential

$$\Delta y = - m : x.(x+m).$$

§. 16.

Ist hingegen $y = \sqrt{x}$: so wird man $y' = \sqrt{(x+m)}$, daher $\Delta y = y' - y = \sqrt{(x+m)} - \sqrt{x}$ finden. Die Subtraction läßt sich aber hier nicht vornehmen; es sey denn, daß man $\sqrt{(x+m)}$ in eine unendliche Reihe verwandelt. Es ist aber dieses nicht nöthig, weil $\sqrt{(x+m)} - \sqrt{x}$ das Differential Δy überhaupt ausdrückt.

Auf diese Art können jede andre Functionen, wenn man sie durch x ausdrückt, differentiirt werden; und es ist hieraus klar, daß sich jede Differentialien werden finden lassen.

§. 17.

Soll man hingegen aus dem ersten Differential (§. 14.)

$$\Delta y = 3mx^2 + 3m^2x + m^3,$$

oder aus dem zweyten

$$\Delta'' y = 6m^2.(x+m)$$

wiederum die Function $y = x^3$ finden, woraus sie entstanden: so geschieht dieses durch das Integriren; und es gehet dabey eben nicht so leicht her. Es ist auch wohl einzusehen, daß diese Integrationen viel schwerer und weitläufiger sind, als die gemeinen, bey denen man die Differentialien Δy und m unendlich klein setzt. Man muß an dem Differential die Function erkennen können, aus welcher dasselbe entsprungen, um sie wiederum zu finden. Und es ist leicht zu erachten, daß man auch hier Differentialien finden kann, aus denen man erst das Integral suchen muß. So z. E. kann jede unendliche Reihe, als eine Reihe von Differentialien

$$\Delta y, \Delta y', \Delta y'', \Delta y''', \text{ etc.}$$

angesehen werden, welche man integriren sollte, um die Summe ihrer Glieder zu finden, weil

$$y' = y + \Delta y;$$
$$y'' = y + \Delta y + \Delta y';$$
$$y''' = y + \Delta y + \Delta y' + \Delta y'',$$

&c. Es giebt viele Fälle, wo diese Integration möglich ist, und die Integralien durch eine geendete Formel ausgedrükt werden können. Hingegen giebt es unzähliche andre, wo dieses nicht anders als wiederum durch unendliche Reihen angeht. Da wir also diese Integration als die allgemeine Theorie von Summirung unendlicher Reihen ansehen können: so ist unstreitig, daß sie von weitläufigem Nutzen ist, und daß es sich der Mühe lohnt, sie zu entwickeln und zu sehen, wie weit man es darin bringen kann. Denn wenn sie zur Vollständigkeit gebracht würde: so würde keine summable Reihe seyn, die man dadurch nicht sollte summiren können.

§. 18.

Das Hauptwerk dabey kömmt, wie bey der Infinitesimal-Integration auf diese zwey Stücke an: 1°. Daß man an dem Differential das Integral erkennen könne. 2°. Wenn dieses unmittelbar nicht angeht, daß man sehe, wie man das Differential verwandeln soll, um sein Integral kenntlich zu machen. Es ist klar daß dieses soviel möglich, und besonders bey unendlichen Reihen, die man durch eine solche Integration summiren

ren will, durch endliche Ausdrüke geschehen müsse. Denn wenn man eine Reihe vermittelst einer andern summiren wollte: so würde aller Vortheil höchstens darauf ankommen, ob diese mehr convergent wäre, als die vorgegebene.

§. 19.

Die erste dieser Regeln, welche zugleich auch der Grund der andern ist, setzt offenbar zum Voraus, daß man sich die Differentialien, die von geendeten Grössen herkommen, wohl bekannt machen müsse, weil man diese aus jenen wieder erkennen soll. Wir werden demnach bey dem Differentiiren anfangen, um zu sehen, was sich bey jeder Art von Functionen für Eigenschaften bey ihren Differentialien zeigen.

§. 20.

Der erste Fall ist, wenn y eine beständige Grösse ist. Denn da hat man für jedem Zeiger x, $x+m$, $x+2m$, etc. schlechterdings $y = y' = y'' =$ etc.; folglich sind so wohl die ersten als die folgenden Differenzen $= 0$. Es werden demnach die beständigen Grössen gar nicht differentiirt, sondern $= 0$ gesetzt, so oft man ihr Differential nehmen sollte. So z. E. wenn $y = x + a$ ist; so wird $\Delta y = \Delta x = m$.

§. 21.

Wenn y die Summe zwoer oder mehrerer Functionen von x ist; z. E. $y = z + v$; so hat man $\Delta y = \Delta z + \Delta v$; weil man in jeder Function $x+m$ für x setzen, und von dem, was heraus kömmt, die Function wieder abziehen muß. Daher ist das Differential des Ganzen der Summe der Differentialien jeder Theile gleich.

§. 22.

§. 22.

Ist hingegen y das Product aus zwoen oder mehrern Functionen von x, z. E. $y = zv$: so wird, sowohl in z als in v, $x + m$ für x gesetzt, und was heraus kömmt, mit einander multipliejrt, von dem Producte aber zv abgezogen; und der Ueberrest wird das gesuchte Differential $\triangle y = \triangle(vz)$ seyn. Denn hier haben wir

$$y = vz. \qquad \text{Daher } \triangle y = \triangle(vz).$$
$$y' = v'z'. \qquad \triangle y' = \triangle(v'z').$$
$$y'' = v''z''. \qquad \triangle y'' = \triangle(v''z'').$$
etc. etc.

Es ist aber

$$v' = v + \triangle v \qquad z' = z + \triangle z.$$
$$v'' = v' + \triangle v'. \qquad z'' = z' + \triangle z'.$$
$$v''' = v'' + \triangle v''. \qquad z''' = z'' + \triangle z''.$$
etc. etc.

Folglich

$$y' = vz + v.\triangle z + z.\triangle v + \triangle v.\triangle z.$$
$$y'' = v'z' + v'.\triangle z' + z'.\triangle v' + \triangle v'.\triangle z'.$$
etc.

Daher

$$\triangle y = v.\triangle z + z.\triangle v. + \triangle v\triangle z.$$
$$\triangle y' = v'.\triangle z' + z'.\triangle v'. + \triangle v'\triangle z'.$$
etc.

§. 23.

Wenn $y = v:z$: so hat man
$$y' = (v + \triangle v):(z + \triangle z).$$

Daher $\triangle y = y' - y = \dfrac{v + \triangle v}{z + \triangle z} - \dfrac{v}{z}$

$$= \frac{z.\triangle v - v.\triangle z.}{z.(z + \triangle z)}$$

§. 24.

§. 24.

Ist y eine Dignität von x, z. E. $y = x^n$: so ist
$y' = (x+m)^n$.

Daher, wenn dieser Ausdruck in eine Reihe aufgelöst wird,

$$y' = x^n + n.x^{n-1}m + n.\left(\frac{n-1}{2}\right).x^{n-2}m^2 + \text{etc.}$$

Folglich

$$\Delta y = y' - y = n.x^{n-1}m$$
$$+ n.\left(\frac{n-1}{2}\right).x^{n-2}m^2 + \text{etc.}$$

Diese Reihe wird allemal abgebrochen, wenn n eine ganze Zahl und positiv ist. Dergestalt hat man

$\Delta.x^0 = 0.$
$\Delta.x^1 = m.$
$\Delta x^2 = 2mx + m^2.$
$\Delta.x^3 = 3mx^2 + 3m^2x + m^3.$
$\Delta.x^4 = 4mx^3 + 6m^2x^2 + 4m^3x + m^4.$
$\Delta x^5 = 5mx^4 + 10m^2x^3 + 10m^3x^2 + 5m^4x$
etc. $+ m^5.$

§. 25.

Da in allen diesen Formeln m als das Differential von x angesehen wird: so können wir $m = \Delta x$ setzen; und es wird überhaupt

$$\Delta y = nx^{n-1}.(\Delta x) + n.\left(\frac{n-1}{2}\right).x^{n-2}.(\Delta x)^2$$

$$+ n.\left(\frac{n-1}{2}\right).\left(\frac{n-2}{3}\right).x^{n-3}.(\Delta x)^3 + \text{etc.}$$

seyn. Bey Summirung unendlicher Reihen, wo alle Glieder unmittelbar auf einander folgen, wird überhaupt $\Delta x = 1$ gesetzt.

§. 26.

§. 26.

Wenn nun überhaupt

$$y = a + bx + cx^2 + ex^3 + fx^4 + \text{etc.}$$

so findet man

$$y' = a + b(x + \Delta x) + c.(x + \Delta x)^2 + \text{etc.}$$

Folglich

$$\begin{aligned} \Delta y = {} & b.\Delta x \\ & + 2cx.\Delta x + c.(\Delta x)^2 \\ & + 3ex^2.\Delta x + 3ex.(\Delta x)^2 + e.(\Delta x)^3 \\ & + 4fx^3.\ \Delta x + 6fx^2.(\Delta x)^2 + 4fx.(\Delta x)^3 \\ & + f.(\Delta x)^4 + \text{etc.} \end{aligned}$$

Und daher, wenn man $\Delta x = 1$ setzt,

$$\begin{aligned} \Delta y = {} & b + c + e + f + g + \text{etc.} \\ & + (2c + 3e + 4f + 5g + \text{etc.}).x \\ & + (3e + 6f + 10g + \text{etc.})x^2 \\ & + (4f + 10g + \text{etc.}).x^3 \\ & + (5g + \text{etc.}).x^4 \\ & \text{etc.} \end{aligned}$$

§. 27.

Wird dieser Ausdruck mit jedem Differential von folgender Form

$$\Delta y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}$$

verglichen: so lassen sich die Coefficienten des Integrals: $y = a + bx + cx^2 + \text{etc.}$ bestimmen. Und diese Reihe wird allemal abgebrochen, wenn jene abgebrochen ist. Es ist auch aus der Differentiation klar, daß das Integral um eine Dignität weiter reicht, als das Differential.

§. 28.

§. 28.

In dieser Vergleichung findet man (§. 26.)

$$\begin{aligned}
A &= b + c + e + f + g + \text{etc.}\\
B &= 2c + 3e + 4f + 5g + \text{etc.}\\
C &= 3e + 6f + 10g + \text{etc.}\\
D &= 4f + 10g + \text{etc.}\\
E &= 5g + \text{etc.}
\end{aligned}$$

§. 29.

Es sey z. E. $\Delta y = x^3$: so wird das Integral diese Form haben:

$$y = a + bx + cx^2 + ex^3 + fx^4$$

Da nun hier (§. 27.)

$$A = B = C = E = F = \text{etc.} = 0,$$

und nur $D = 1$

ist: so hat man (§. 28.)

$$\begin{aligned}
A &= b + c + e + f = 0.\\
B &= 2c + 3e + 4f = 0.\\
C &= 3e + 6f = 0.\\
D &= 4f = 1.
\end{aligned}$$

Hieraus findet man

$$\begin{aligned}
f &= +\tfrac{1}{4}.\\
e &= -\tfrac{1}{2}.\\
c &= +\tfrac{1}{4}.\\
b &= 0.
\end{aligned}$$

Folglich

$$y = a + \tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{1}{4}x^4 = a + \tfrac{1}{4}x^2.(x-1)^2,$$

das gesuchte Integral von $\Delta y = x^3$.

§. 30

Wenn demnach die Reihe

$$1 + 8 + 27 + 64 + 125 + \text{etc.} \ldots\ldots + \Delta y,$$

deren Zeiger

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \text{etc.} \ldots\ldots\ x;$$

und

und daher $\Delta y = x^3$ ist: so wird man die Summe

$1,\ 9,\ 36,\ 100, \ldots \frac{1}{4}.(x^2 - 2x^3 + x^4)$

finden. In dem Integral $y = a + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^4$ ist a eine beständige Größe, die man, wie bey den gemeinen Integrationen, aus den Bedingnissen der Aufgabe bestimmen muß.

§. 31.

Wenn das Differential Δy durch x und Δx ausgedrückt vorgegeben ist: so lassen sich leicht alle folgende Differentialien $\Delta'' y$, $\Delta''' y$, Δ^{IV}, etc. durch x und $(\Delta x)^2$, $(\Delta x)^3$, $(\Delta x)^4$, etc. ausdrücken. Wir müssen demnach sehen, wie das Integral durch diese Differentialien, die man als bekannt annehmen kann, bestimmt wird.

§. 32.

Es sey demnach die Reihe der Glieder:

$y,\quad y',\quad y'',\quad y''',\quad y^{IV}$, etc.

ihre Zeiger

$x, x + \Delta x, x + 2\Delta x, x + 3\Delta x, x + 4\Delta x$, etc.

so hat man (§. 13.)

$y' = y + \Delta y;$

$y'' = y' + \Delta y' = + 2\Delta y + \Delta'' y;$

$y''' = y'' + \Delta y'' = y + 3\Delta'' y + \Delta''' y;$

$y^{IV} = y''' + \Delta y''' = y + 4\Delta y + 6\Delta'' y + 4\Delta''' y + \Delta^{IV} y$, etc.

Und daher überhaupt

$$y^n = y + n.\Delta' y + n.\left(\frac{n-1}{2}\right).\Delta'' y$$

$$+ n.\left(\frac{n-1}{2}\right).\left(\frac{n-2}{3}\right).\Delta''' y$$

weil jedes folgende Glied y^{n+1} entsteht, wenn man das unmittelbar vorhergehende y^n differentiirt, und das Differential Δy^n zu demselben addirt.

§. 33.

Wird in der vorgegebenen Reihe y, y', y'', y''', etc. das erste Glied nicht gerechnet: so ist n überhaupt der Zeiger des $n$ten Gliedes. Denn so sind die Glieder $y, y', y'', y''', \ldots \ldots y^n$; ihre Zeiger $0, 1, 2, 3, \ldots \ldots n$.

§. 34.

Diese Reihe ist ungleich dienlicher, aus den Differentialien ihre Integralien zu finden, als die vorhergehende Methode (§. 27.); weil man dabey weiter nichts zu thun hat, als die Differenzen $\Delta' y$, $\Delta'' y$, $\Delta''' y$, etc. zu suchen. Wird von denselben eines beständig: so werden alle folgenden $= 0$; und folglich hat das Integral eine geendete Form. Wir wollen die Methode durch einige Beyspiele erläutern.

§. 35.

Man soll die Summe der Quadratzahlen finden: so hat man

$y = 0.$			
$y' = 1.$	$\Delta' y = 1.$	Daher	
$y'' = 5.$	$\Delta' y' = 4.$	$\Delta'' y = 3.$	Und
$y''' = 14.$	$\Delta' y'' = 9.$	$\Delta'' y' = 5.$	$\Delta''' y = 2.$
$y^{IV} = 30.$	$\Delta' y''' = 16.$	$\Delta'' y'' = 7.$	$\Delta''' y' = 2.$
$y^{V} = 55.$	$\nabla' y^{IV} = 25.$	$\Delta'' y''' = 9.$	$\Delta''' y'' = 2.$
etc.	etc.	etc.	etc.
	$\Delta' y^n = (n+1)^2.$	$\Delta'' y^{n-1} = 2n+1$	$\Delta''' y^{n-2} = 2 = \text{Const.}$

Da also

$$\Delta' y = 1,$$
$$\Delta'' y = 3,$$
$$\Delta''' y = 2,$$

und die folgenden Differentialien = o sind: so findet man

$$y^n = n \cdot 1 + n \cdot \left(\frac{n-1}{2}\right) \cdot 3 + n \cdot \left(\frac{n-1}{2}\right) \cdot \left(\frac{n-2}{3}\right) \cdot 2.$$

oder zusammen gezogen

$$y^n = (2n^3 + 3n^2 + n) : 6 = \tfrac{1}{6} \cdot n(n+1) \cdot (2n+1). \; ^{*)}$$

§. 36.

*) Eine andre Art, solche Reihen, deren Differenzen irgend = o werden, zu integriren oder zu summiren, ist auch folgende. Man habe z. E. die Reihe

$\Delta''' y^{-'''}$	$= a.$	$\Delta'' y^{-''} =$	$b.$
$\Delta''' y^{-''}$	$= a.$	$\Delta'' y^{-'} =$	$a + b.$
$\Delta''' y^{-'}$	$= a.$	$\Delta'' y$	$= 2a + b.$
$\Delta''' y$	$= a.$	$\Delta'' y'$	$= 3a + b.$
etc.		etc.	

$\Delta y^{-'} =$	$c.$	$y =$	$d.$
Δy	$= a + b + c.$	$y' =$	$a + b + c + d.$
$\Delta y'$	$= 3a + 2b + c.$	$y'' =$	$4a + 3b + 2c + d.$
$\Delta y''$	$= 6a + 3b + c$	$y''' =$	$10a + 6b + 3c + d.$
etc.		etc.	

wobey die dritten Differenzen = a = Const. sind
Nach §. 32 und 35. ist also:

$$y^n = d + n \cdot (a + b + c) + n \left(\frac{n-1}{2}\right) (2a + b) + n \left(\frac{n-1}{2}\right) \cdot \left(\frac{n-2}{3}\right) \cdot a.$$

Allein wenn, wie hier, die negativen Differenzen $\Delta y^{-'}$, $\Delta' y^{-''}$, $\Delta''' y^{-'''}$ etc. gegeben oder bekannt

§. 36.

Es seyn die ersten Differentialien

$1,\ +\frac{1}{2},\ +\frac{1}{3},\ +\frac{1}{4},\ +\frac{1}{5},\ +\frac{1}{6},$ etc.

daher die zweyten $-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{6},\ -\frac{1}{12},\ -\frac{1}{20},\ -\frac{1}{30},$ etc.

die dritten $+\frac{1}{3},\ +\frac{1}{12},\ +\frac{1}{30},\ +\frac{1}{60},$ etc.

die vierten $-\frac{1}{4},\ -\frac{1}{20},\ -\frac{1}{60},$ etc.

die fünften $+\frac{1}{5},\ +\frac{1}{30},$ etc.

die sechsten $-\frac{1}{6},$ etc.

etc.

Daher hat man

$$\Delta y = 1;$$
$$\Delta'' y = -\tfrac{1}{2};$$
$$\Delta''' y = +\tfrac{1}{3};$$

etc.

Folglich das Integral

$$y^n = n.1 - n.\left(\frac{n-1}{2}\right).\tfrac{1}{2} + n.\left(\frac{n-1}{2}\right).\left(\frac{n-2}{3}\right).\tfrac{1}{3}$$
$$- n.\left(\frac{n-1}{2}\right).\left(\frac{n-2}{3}\right).\left(\frac{n-3}{4}\right).\tfrac{1}{4} +$$

etc.

kannt sind: so ist klar, daß man auch aus diesen die Summen y', y'', y''', etc. finden kann. Denn da hat man, wie das Gesetz der Zunahme von y zeigt,

$$y^n + n.\Delta y^{-'} + n.\left(\frac{n+1}{2}\right).\Delta'' y^{-''} + n.$$
$$\left(\frac{n+1}{2}\right).\left(\frac{n+2}{3}\right).\Delta''' y^{-'''} + \text{etc.}$$

oder in gegenwärtigem Beyspiel,

$$y^n = d + n.c + n.\left(\frac{n+1}{2}\right).b + n.$$
$$\left(\frac{n+1}{2}\right).\left(\frac{n+2}{3}\right).a.$$

Setzt man in dieser Reihe n unendlich klein, so ist

$$\frac{y^n}{n} = 1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{25} + \tfrac{1}{36} + \text{etc.}$$

Es ist demnach die Summe dieser Reihe die Tangente des Winkels, den die krumme Linie mit der Axe macht, deren Abscissen 1, 2, 3, 4, etc. und die entsprechenden Ordinaten

$1,\ 1 + \tfrac{1}{2},\ 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3},\ 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}$, etc.

sind.

§. 37.

Wenn $\frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta x}{a}$: so ist y eine logistische Linie, deren Subtangente $= \frac{\Delta y}{y} \,.\, a : \log.\left(1 + \frac{\Delta y}{y}\right)$

$= \Delta x : \log.\left(1 + \frac{\Delta x}{a}\right)$.

§. 38.

Wenn $\Delta y = 2 \,.\, \surd(ay) \,.\, \Delta x + a \,.\, (\Delta x)^2$: so ist $y = ax^2$.

§. 39.

Wenn $\Delta y = y - \surd(y^2 - 2x.\Delta x - (\Delta x)^2)$: so ist $y = \surd(1 - x^2)$.

§. 40.

$y \,.\, \Delta y = \Delta x$ giebt eine Parabel, wenn Δy constans *).

De

*) Dise letztern vier kurzen Paragraphen hatte Lambert mit veränderter Dinte und Schrift geschrieben; woraus

aus sich schließen läßt, daß er anfänglich diese Materie noch weiter auszuführen mag Willens gewesen seyn; wie er denn auf einem beygelegten besondern Blatt in der That noch folgende Sätze notirt hatte:

De Calculo differentiali quantitatum discretarum

1. Dieser Calcul findet überhaupt statt, wo eine Reihe von Zahlen als Ordinaten angesehen wird, und wo man Δx oder das Differential der Abscissen beständig setzt.

2. Solche Reihen werden oft auch aus Erfahrungen gefunden, wie bey den Sterbe-Registern, 2c.

3. Es seyn zwo Reihen y, z, so zu den Abscissen x gehören. Ist hier y gegegeben: so hat man auch jede Δy. Man setze, z soll dadurch gefunden werden, daß man Δz durch y, Δy, bestimmt: so kömmt die Sache aufs Integriren an; oder man muß Jahr für Jahr rechnen.

4. Hiebey wird Δx beständig gesetzt; und da ist Δy, Δz veränderlich.

5. Hat man nur Δx, y, Δy: so kann Δx beständig gesetzt werden. Es sey alsdann eine Gleichung zwischen y, Δy, Δx gegeben: so ist die Frage, wiefern hinwiederum Δy als beständig angesehen werden könne. Wenigstens werden die Coefficienten verändert.

6. Z. E. für die gerade Linie $\Delta y = m \cdot \Delta x$ hat dieses nichts zu sagen. Δy ist in beständiger Verhältniß von Δx, man mag eines oder das andre beständig setzen, 2c. oder beyde veränderlich.

7. Bey completen Differenzen, z. E. $\Delta y = 2x . \Delta x + (\Delta x)^2$, geht es auch an, daß man Δx veränderlich setzt, wenn es nöthig ist 2c.

8. Hingegen bey $\frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta x}{a}$ muß Δx beständig gesetzt werden, wenn y Ordianten einer logistischen Linie seyn sollen. Denn Δy nimmt bey einerley y nicht in Verhältniß von Δx ab oder zu; wie man dieses annehmen kann, wenn $\Delta x = dx$ wird 2c.

 9. Man

9. Man setze $\Delta y = x . \Delta x$. Ist hier $\Delta x = Const.$ so ist die Gleichung für eine Parabel; und es ist

$$y = \tfrac{1}{2} . (x^2 + x . \Delta x).$$

10. Also kann $\Delta x = Const.$ in Form eines Coefficienten selbst in dem Integral vorkommen.

11. Es sey $y = a^x$:

so ist $\Delta y = a^{x + \Delta x} - a^x = y . (a^{\Delta x} - 1)$.

Demnach $\frac{\Delta y}{y} = a^{\Delta x} - 1$.

Ist nun hier Δx constans: so läßt sich

$$a^{\Delta x} - 1 = \Delta z = Const.$$

setzen; demnach

$$\frac{\Delta y}{y} = \Delta z.$$

VII.

Flächeninhalt eines Vierecks im Kreise, und dieses Kreises Halbmesser, aus den gegebenen Seiten des Vierecks zu finden.

Aufgabe I.

Den Inhalt A eines in einem Kreise beschriebenen Vierecks zu finden. Fig. 1.

Auflösung.

Man verlängere die Seiten d und b, die sich in o schneiden werden, und bezeichne die Seitenlinien, die den Perimeter des Vierecks ausmachen