

## VI.

## Ueber die vierrädri gen Wagen. Ein Nachlaß von J. H. Lambert \*).

I. Bekanntlich braucht es, um einen Wagen auf ebener Straße gehen zu machen, keiner andern Kraft als derjenigen, die erfordert wird, das Reiben, welches die Achsen der Räder leiden, zu überwinden. Daher kommt, daß wenn man die den Wagen in Gang zu bringen hinreichende Kraft haben will, man anstatt des ganzen Gewichtes, das die Räder tragen, nur den dritten Theil desselben nimmt; und daß selbst dieses Drittel, im Verhältniß des Halbmessers des Rades zum Halbmesser der Achse noch vermindert werden muß.

II. Diese Regel mag angehen, wenn die Räder alle gleich sind, oder wenn wenigstens das Verhältniß ihrer Durchmesser zu den Durchmessern der Achsen dasselbe ist. Allein, da besondre Gründe erheischen, daß die Vorderäder kleiner als die Hinteräder gemacht werden, so entstehen daraus einige Folgerungen, bey welchen wir uns etwas aufhalten müssen.

III. Wenn die Vorderäder kleiner sind, so muß man zuerst untersuchen, ob ihre Achse in eben dem Verhältniß kann verringert werden. Denn die Kraft der Achsen verhält sich wie der Cubus ihrer Durchmesser, dagegen das Reiben nur im einfachen Verhältniß mit diesen Durchmessern steht.

D 2

IV. Zu-

\*) Das im May 1776 geschriebene französische Original dieses Aufsatzes war zu einer akademischen Abhandlung unter dem Titel: Sur les Voitures à quatre Roues bestimmt; und wäre vermuthlich noch weiter ausgeführt worden, wenn der sel. Verfasser (es starb am 25ten September 1777) länger gelebt hätte.

IV. Zugleich soll aber auch die Kraft der Achsen mit dem Gewichte, das die Räder tragen, im Verhältniß stehen. Hieraus folgt, daß der Schwerpunkt näher bey den Hinterrädern seyn muß; und daher muß alles dies auf eine solche Art berechnet und ausgemittelt werden, daß das Verhältniß zwischen den Rädern und ihren Achsen von allen das vortheilhafteste sey.

V. Es sey der Halbmesser der Hinterräder  $= R$ ; der Vorderräder  $= r$ ; die respectiven Halbmesser ihrer Achsen  $= A$  und  $a$ . Ferner, die Distanz zwischen den Achsen  $= l$ ; die Distanz des Schwerpunkts von der Vorderachse  $= D$ ; so wird die Distanz desselben Schwerpunkts von der Hinterachse  $= l - D$  seyn; und wenn das ganze Gewicht, das die Achsen tragen, durch  $P$  bezeichnet wird, so trägt

die Vorderachse das Gewicht  $(l - D) P$ .

die Hinterachse  $= \quad \quad \quad DP$ .

Nun sollen aber diese Gewichte wie die Würfel der Halbmesser der Achsen sich verhalten. Folglich ist

$$na^3 = (l - D) P, \text{ und } nA^3 = DP.$$

VI. Ueberdies soll das Reiben, welches die Achsen leiden, durch den dritten Theil des Gewichtes, das sie tragen, ausgedrückt werden, und die zum Gange der Räder erforderte Kraft ist

$$\text{für die vordern} = \frac{1}{3} (l - D) P \cdot \frac{a}{r}$$

$$\text{für die hintern} = \frac{1}{3} DP \cdot \frac{A}{R}.$$

Folglich wird die ganze Kraft seyn

$$F = \frac{1}{3} P \cdot \left[ (l - D) \frac{a}{r} + D \frac{A}{R} \right]$$

oder,

aber, wenn man für A und a, ihre Werthe setzt,

$$3 F n^{1.5} = P^{4.5} \left[ \frac{1}{r} (1 - D)^{4.5} + \frac{1}{R} D^{4.5} \right].$$

VII. Nun kann aber, wenn man D als veränderlich betrachtet, die Kraft F ein Kleinstes werden. Dies geschieht, wenn man setzt

$$R^3 : r^3 = D : (1 - D)$$

hieraus folgt  $R : r = A : a$ ; und

$$3 F n^{1.5} = \frac{P^{4.5} \cdot D^{4.5}}{R} \left[ \frac{r^3}{R^3} + 1 \right] \text{ oder } F = \frac{PA}{3R}.$$

VIII. Das so eben gefundene Verhältniß  $R : r = A : a$  giebt uns zu erkennen, daß wirklich die Durchmesser der Achsen, im einfachen Verhältniß mit den Durchmessern ihrer Räder stehen müssen, und daß gerade das Minimum der Kraft F solches erfordert. Man sieht aber auch, daß sobald als die Räder ungleich sind, der Schwerpunct von allem, was auf die Räder drückt, näher bey den Hinterrädern befindlich seyn muß. Das Verhältniß

$$R^3 : r^3 = D : (1 - D)$$

$$\text{giebt } D = R^3 : (R^3 + r^3)$$

$$1 - D = r^3 : (R^3 + r^3)$$

IX. Bey einer Vergleichung dieser Formeln mit dem üblichen Gebrauche hat mich gedünkt, daß man sie an Wagen, die große Lasten führen sollen, ziemlich genau beobachte. Die Vorderräder macht man in einem nur sehr mäßigen Verhältniß kleiner als die Hinterräder. Die Last, mit welcher man diese Wagen beschweret, ladet man ein Stück weit über die Hinterräder hinaus, dagegen man sie nur wenig oder gar nicht vor die Vorder-

D 3

räder

räder sich erstrecken läßt. Auf diese Weise wird der Schwerpunkt der ganzen Last, die auf die Nabe der Räder drückt, den Hinterrädern näher gebracht. Dies muß auch so seyn, weil diese größer sind. Hiedurch erhält man ferner den Vortheil, daß der Wagen unter größern Winkeln kann gedrehet werden, und man nicht nöthig hat, die Last auf den Hinterrädern (oder Achsen) aufzuhäufen. Außerdem krümmen sich die Wagenleitern viel weniger, als wenn die ganze Ladung zwischen den vordern und hintern Rädern ruhte. Was aber die Rutschen anlangt, so will man, daß die Vorderräder zwey- bis dreyimal kleiner seyen, als die Hinterräder. Hieraus würde dann folgen, daß der Schwerpunkt 3 bis 27mal näher bey den Hinterrädern seyn müßte, Indessen ist dies nicht üblich, weil man auch verlangt, daß der Kasten zwischen den Rädern hänge. Näher kommt man der Regel auf Reisen, weil alsdann die Hinterräder mit der schwersten Bagage belastet werden.

X. Unsere Formeln zeigen uns an, daß die Kraft, welche erfordert wird, einen vierrädrigen Wagen zu ziehen, viel weniger von dem Verhältniß in der Größe der Räder, als von der Art, wie sie beladen werden, abhängt. Wir wollen, um ein Beyspiel zu geben, annehmen, die Last sey ein Parallelepipedum. So wird denn ihr Schwerpunkt in der Mitte ihrer Länge seyn. Naget nun dieses Parallelepipedum wenig oder gar nicht vor der Achse der Vorderräder hervor, so sage man: Wie  $R^3$  zu der halben Länge sich verhält, eben so verhält sich  $r^3$  zu der Distanz zwischen der Mitte des Parallelepipedums und der Achse der Hinterräder. Wenn demnach die Länge  $= \lambda$  ist, so wird diese Distanz

$$= \frac{\lambda r^3}{2 R^3} \text{ seyn.}$$

Folgt.

Folglich wird dies Parallelepipedum um den Theil

$$\frac{1}{2} \lambda - \frac{\lambda r^3}{2R^3} = \frac{1}{2} \lambda \cdot \frac{R^3 - r^3}{R^3}$$

über die Hinterräder hervorragen.

Weil aber dieser Theil nicht leicht größer als  $\frac{1}{4} \lambda$  seyn muß, so setze man  $\frac{1}{2} \lambda = \frac{1}{4} \lambda \cdot \frac{\lambda r^3}{2R^3}$  und man erhält  $R = r \cdot 2^{1/5} = 1,26 r$ .

Hieraus folgt, daß wenn das Minimum der Kraft F gesucht wird, die Durchmesser der Räder in dem Verhältnis von 1 zu 1,26 seyn müssen, oder  $R:r = 5:4$ .

Wenn demnach die Hinterräder 4 Fuß in der Höhe haben, so müssen die Vorderräder 4 Fuß hoch seyn. Und wenn der Zwischenraum der Achsen 10 Fuß ist, so wird der vierte Theil dieser Länge = 2 $\frac{1}{2}$  Fuß, und weil die Wagenleiter um diese Länge über die Hinterräder hinausgeht, so beträgt denn dieser Vorschuß so viel als den halben Durchmesser der Hinterräder. Auch hütet man sich in der gewöhnlichen Praxis ihn stärker herauszuziehen zu lassen.

XI. Was ich eben jetzt gesagt habe, kann dienen, dasjenige zu berichtigen, was Carnot von den Wagen und Kutschen in seinem *Traité des forces mouvantes* (Abhandlung von den bewegenden Kräften) bringt, und von Desaguliers in seinem *Cours de Physique experimentale* von Wort zu Wort ist abgeschrieben worden. Er sagt: Es würde viel vortheilhafter seyn, die vier Räder an Wagen und Kutschen groß und gleich oder ungleich (gleich) zu machen, als die vordern um die Hälfte kleiner,

wie an mehr Orten üblich sey. \*) Dieser Ausspruch und insonderheit dieses ungefähr (à peu près) kommt vollkommen mit dem Mangel an geometrischer Strenge, und mit der unbestimmten Art sich auszudrücken überein, welche in dem ganzen *Traité des forces mouvantes* herrschen; und man muß sich wundern, daß *Desaguliers* nichts dabey zu erinnern gefunden hat. Unsere Theorie gewähret uns eine deutlichere Einsicht in diese Sache. Es folgt daraus, daß wenn die Vorderräder wirklich um die Hälfte kleiner sind als die Hinterräder, alsdann der Schwerpunkt 3 Mal näher bey diesen als bey jenen seyn müßte; welches nicht statt finden kann, zum wenigsten, wenn die Last mehr einem Prisma als einer Pyramide gleichen soll. Hingegen sehen wir auch, daß wenn die vier Räder alle einander gleich gemacht werden, der Schwerpunkt in die Mitte fällt, und die Schwingbäume bey einer großen Last zu viel leiden würden. Ueberdies, hat man in winklichten Wegen mehr Mühe den Wagen zu lenken, wenn die Vorderräder sehr groß sind, wie Herr *Camus* heisset. Man wird also besser thun, sich an sein à peu près zu halten, es aber zu bestimmen, wie wir gethan haben, so daß die Durchmesser wie 5 zu 4 sich zu einander verhalten. Und wenn die Durchmesser der Achsen in eben dem Verhältniß stehen, wie sich gehöret (oben VIII), und man die Last dergestalt vertheilt, daß der Schwerpunkt zweymal näher bey der Achse der Hinterräder als der Vorderräder sey, so wird die Kraft *F* vollkommen dieselbe seyn, als wenn sowohl die Räder als ihre Achsen von gleicher Größe wären, indem das Verhältniß zwischen den Durchmes-

fern

\*) Qu'il seroit beaucoup plus avantageux de faire les quatre roues de chariot et de carosse grandes et égales ou à peu près, que de faire celles de devant moitié plus petites, comme il se pratique en plusieurs endroits.

fern der Vorder und ihrer Achsen dasselbe bleibt. Herr Camüs hat weder auf dieses Verhältniß, noch auf den Schwerpunct Rücksicht genommen. Außerdem war es etwas unschicklich seine Bemerkung ohne Unterschied auf alle vierrädrige Fahrwerke auszudehnen. Die Kutschen machen aus ganz besondern Ursachen eine Ausnahme. Jedermann weiß aber auch, daß sie nicht bestimmt sind, wie Güterwagen, Lasten von 20 bis 30 Centnern zu tragen, und daß, wenn man sie mit sehr schweren Eosfern beladet, diese auf die Achse der Hinterräder zu ruhen kommen. Daher unterscheidet sich auch eine eigentliche Reisekutsche genugsam von einer Spazier- oder Wistenkutsche, um bemerken zu lassen, daß man nicht ohne überwiegende Gründe die Vorderräder um mehr als das Verhältniß der Gleichheit oder wenigstens von 5 zu 4 erfordert hätte, kleiner gemacht habe.

---