X.

J. H. Lamberts mathematische Ergötzungen über die Glücksspiele. *)

I. Lotterie.

§. 1. Man nimmt zwey ganze Spiele von 52 Karten. Von dem ersten werden 3 herausgezogen, und unbesehen auf den Tisch gelegt. Das andere ganze Spiel wird unter die Spieler ausgetheilt, doch so, daß ein jeder die Karten, so er haben will, erkaufen muß, welche dann allezeit dem Meistbietenden überlassen werden. Wenn nun also alle Karten verkauft, und der Preis auf die 3 gedeckten Karten gelegt ist; so fängt man an das zweyte Spiel, davon diese 3 Karten genommen, nach einander abzuheben, wobey denn die von dem ausgetheilten Spiele mit der aufgedeckten correspondirende Karten als unnütz von dem Besitzer weggelegt werden muß. Dieses wird continuirt, bis das zweyte Spiel ganz abgedeckt worden. So werden denn zulezt 3 Karten in der Spieler Händen bleiben, welche mit den 3 gedeckten Karten correspondiren; welche leztere dann aufgedeckt, und der darauf gesezte Preis dem Besitzer der correspondirenden Karten gegeben wird ꝛc.

§. 2. Während des Aufdeckens der Karten pflegen die Spieler ihre Karten unter einander zu verhandeln, wobey denn, weil der Preis der Karten allezeit steiget, je weniger Karten noch aufzudecken sind, nicht selten viel Unrichtigkeit unterläuft, indem vielmahl die Karten theuerer oder wohlfeiler, als es sich gebührte, erkauft oder verkauft werden.

*) Aus dessen hinterlassenen Schriften von Herrn Direktor Bernoulli mitgetheilt.

§. 3. Da nun der am sichersten spielt, welcher den Werth der Karten bey jedem Falle kennt, so lohnet es der Mühe, einige Regeln auszufinden, wodurch der mittlere Werth der Karten ausgerechnet und gefunden werden könne.

§. 4. Das Spiel bestehet aus 52 Karten, darunter 3 niedergelegt werden, die übrigen 49 gelten nichts. Also risquirt eine Karte anfänglich 49 gegen 3.

§. 5. Hernach muß man den auf die 3 Karten gelegten Preis wissen. Dieser, weil er sonst veränderlich sey $= a$. Da nun unter den 52 verkauften Karten eine jede gleichgroße Prätension daran hat: so gilt anfangs eine Karte $= a : 52$.

§. 6 Wären von den 52 Karten schon b Karten ausgegeben worden, so würde alsdann eine Karte gelten $= \frac{a}{52 - b}$.

§. 7. Gesezt der Preis auf den gedeckten Karten sey 720 Punkte, und es wären schon 16 Karten aufgedeckt worden, so wäre der Preis einer Karte

$$= \frac{a}{52 - b} = \frac{720}{52 - 16} = \frac{720}{36} = 20 \text{ Punkte.}$$

§. 8. Wenn ich ferner meine Hoffnung am Gewinnst wissen wollte, und d Karten in Händen hätte, so gälten meine sämmtlichen Karten $\frac{da}{52 - b}$, welche, mit a verglichen, meine Hoffnung am Gewinnst $\frac{da}{52 - b} : a = \frac{da}{52a - ba}$ $= d : (52 - b)$ zeigt.

§. 9. Z. E. Es wäre $a = 500$ Punkte, $b = 12$ Karten. $d = 4$ Karten: so wäre der Werth meiner Karten

ten $\frac{da}{52-b} = \frac{2000}{40} = 50$ Punkte. Die Hoffnung zum Gewinn wäre alsdann wie 50 zu 500, das ist, wie 1 zu 10, oder $d : (52-b) = 4 : 40 = 1$ zu 10. Also hätte ich den zehnten Theil zu hoffen.

Tabelle zum Lotterie-Spiel; wenn der Preis auf den gedeckten 3 Karten 1000 ist.

Aufschlag.	Preis der Karten.	Aufschlag.	Preis der Karten.	Aufschlag.	Preis der Karten.	Aufschlag.	Preis einer Karte.
0	$19\frac{1}{4}$	13	$25\frac{2}{3}$	26	$38\frac{1}{2}$	39	77
1	$19\frac{2}{3}$	14	$26\frac{1}{3}$	27	40	40	$83\frac{1}{3}$
2	20	15	27	28	$41\frac{2}{3}$	41	90
3	$20\frac{1}{2}$	16	$27\frac{3}{4}$	29	$43\frac{1}{2}$	42	100
4	21	17	$28\frac{3}{5}$	30	45	43	111
5	$21\frac{1}{3}$	18	$29\frac{2}{5}$	31	$47\frac{2}{3}$	44	125
6	$21\frac{3}{4}$	19	$30\frac{1}{3}$	32	50	45	$142\frac{6}{7}$
7	$22\frac{1}{4}$	20	$31\frac{1}{4}$	33	$52\frac{2}{3}$	46	$166\frac{2}{3}$
8	$22\frac{2}{3}$	21	$32\frac{1}{4}$	34	$55\frac{5}{9}$	47	200
9	$23\frac{1}{4}$	22	$33\frac{1}{3}$	35	$58\frac{3}{4}$	48	2
10	$23\frac{3}{4}$	23	$34\frac{5}{6}$	36	$62\frac{1}{2}$	49	$333\frac{1}{3}$
11	$24\frac{2}{5}$	24	$35\frac{5}{7}$	37	$66\frac{2}{3}$	50	—
12	25	25	37	38	$71\frac{3}{7}$	51	—

Obige Rechnung ist für jede der 3 verdeckt liegenden Karten besonders. Da aber auch Amben und Ternen vorkommen, so wird die Rechnung anders gemacht.

Nämlich

$$52-b \text{ Karten} \ldots 3 \text{ Karten} \ldots d \text{ Karten}$$

haben $\frac{(52-b)}{1} \cdot \frac{(51-b)}{2}$ Amben.... 3 Amb.... $d\,\frac{d-1}{2}$ Amben

und

$\frac{(52-b)}{1}\frac{(51-b)}{2}\frac{(50-b)}{3}$ Ternen.... 1 Terne... $d\,\frac{d-1}{2}\cdot\frac{d-2}{3}$ Tern.

Demnach gilt **eine** Karte $\frac{\frac{1}{3}.2.3}{52-b} = \frac{2}{52-b}$

und d Karten d mal so viel, weil die Amben, Ternen etc. nichts voraus haben.

Meine Hoffnung mit d Karten

eine zu gewinnen ist $\frac{2d}{52-b}$,

zwo zu gewinnen ist $\frac{2d(d-1)}{(52-b)(51-b)}$,

alle **drey** zu gewinnen ist $\frac{2.d(d-1)(d-2)}{3(52-b)(51-b)(50-b)}$.

§. 10. Wenn ich nun weiß, wie viel meine Karten gelten, so kann ich selbige mit Gewinn verkaufen; hingegen auch keine einkaufen, wann es nicht um den rechten Preis geschehen kann.

§. 11. Will ich eine Karte nach Proportion theuerer verkaufen, als selbige eingekauft worden; so sage man: wie der anfängliche Preis $\frac{2}{52}$, zu dem laufenden $\frac{2}{52-b}$, also der Preis meiner erkauften Karten (dieser sey $= e$) zu zu dem Preis $\frac{52c}{52-b}$, um den ich meine Karte verkaufen kann.

§. 12. Um den Preis der Karten bald zu wissen, habe ich hier §. 9. eine ausgerechnete Tafel, auf jeden Umschlag beygefügt. Gesezt, das auf den 3 Karten liegende Geld, sey 1000 Pf.; woraus der Preis jeder Karten nach Proportion anderer aufliegender Punkte zu finden.

II. Würfel.

§. 1. Jeder Würfel hat 6 Seiten 1, 2, 3, 4, 5, 6: Wollte nun Jemand mit einem Würfel aufs erstemal eine gewisse Zahl treffen, so wäre alsdann das pary 5 gegen 1; weil unter sechs Seiten nur eine gute, dagegen aber 5 schlechte sind. Seine Hoffnung ist derowegen 1 : 5.

§. 2. Wollte Jemand mit 2 Würfeln eine gewisse Zahl treffen, so können damit 36 Fälle vorkommen, worunter nach hier beygefügtem Täfelchen verschiedene mehr oder weniger risquiren. Z. E. Wollte Jemand mit 2 Würfeln 9 Augen treffen, so findet man im Täfelchen unter 9 Augen 4 Fälle, die treffen können, da hingegen 32 fehlen können. Also ist meine Hoffnung zu gewinnen 4 : 32 = 1 : 8.

Würfel-Täfelchen.

I. Für 1 Würfel.

Augen	1	2	3	4	5	6	Summa
Fälle	1	1	1	1	1	1	Fälle 6.

II. Für 2 Würfel.

Augen	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Summa
Fälle	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1	36 Fälle.

III. Für 3 Würfel.

Augen	3	4	5	6	7	8	9	10	In
Fälle	1	3	6	10	15	21	25	27	Summa
Augen	11	12	13	14	15	16	17	18	216
Fälle	27	25	21	15	10	6	3	1	Fälle.

IV. Für 4 Würfel.

Augen	4	5	6	7	8	9	10	In
Fälle	1	4	10	20	35	56	80	allem
Augen	11	12	13	14	15	16	17	giebt
Fälle	104	125	140	146	140	125	104	es
Augen	18	19	20	21	22	23	24	1296
Fälle	80	56	35	20	10	4	1	Fälle.

Duplier-Täfelchen auf Treffer und Fehler.

Gesetzt.	Gehalten.	Verlohren.	Gewonnen.
1	2	1	1
3	6	4	2
9	18	13	5
27	54	40	14
81	162	121	41
243	486	364	122
729	1458	1093	365

§. 3. Eben so ist es mit den 2 andern Täfelchen zu 3 und 4 Würfeln.

§. 4. Es geschieht zuweilen, daß man mit 3 Würfeln auf Treffer und Fehler spielt, da denn, was über 10 Augen ist, getroffen, was 10 und darunter ist, gefehlt. Man sieht aber aus obigem Täfelchen, daß so viel Treffer als Fehler sind, nämlich 108 beyderseits. Also ist meine Hoffnung zu gewinnen wie 1 gegen 1; das ist, ich risquire gleich viel als mein Mitspieler.

§. 5. Will man aber auf diese Weise gewiß gewinnen, so muß man anfangs wenig setzen; gehet es verlohren, muß man tupliren oder quadrupliren, welches dann den vorigen Verlust mit Gewinnst wieder ersezt; sobald man aber gewonnen hat, muß man wieder wie anfangs, wenig setzen.

§. 6. Will Jemand mit 2 Würfeln zwey gleiche Augen treffen, so kommen ihm 6 Fälle vor, nämlich: 1, 1; 2, 2; 3, 3; 4, 4; 5, 5; und 6, 6. Da nun unter 36 Fällen nur 6 gute, hingegen 30 schlechte sind, so ist seine Hoffnung, wie 6 : 30 oder 1 : 5.

§. 7. Wollte Jemand mit 3 Würfeln spielen, doch so, daß zum Gewinnen 2 davon gleiche Augen haben: so sind von 216 Fällen nur 96 gute. Nämlich

111	331	551	121	313	515	111	144	155
112	332	552	131	323	525	211	243	255
113	333	553	141	343	535	311	344	355
114	334	554	151	353	545	411	444	455
115	335	555	161	363	555	511	544	555
116	336	556	111	333	565	611	644	655
221	441	661	212	414	616	122	133	166
222	442	662	232	424	626	222	233	266
223	443	663	242	434	636	322	333	366
224	444	664	252	444	646	422	433	466
225	445	665	262	454	656	522	533	566
226	446	666	222	464	666	622	633	[illegible]

Also ist seine Hoffnung wie 96 zu 216 oder 4:9.

§. 8.

§. 8. Will Jemand mit 3 Würfeln so spielen, daß er gewinne, wenn alle 3 Augen gleich sind: so sind für ihn nur 6 Fälle, nämlich 111; 222; 333; 444; 555; 666; wider ihn aber 210. Also ist seine Hoffnung wie 6 : 210 oder 1 : 35.

§. 9. Will Jemand mit 2 Würfeln also spielen, daß einer davon eine gewisse Zahl Augen treffe. Z. E. 6; so hat er 11 Fälle zu gewinnen und 25 zu verliehren. Also ist seine Hoffnung 11 : 25.

III. Von Münz oder Ummünz.
Croix ou pile.

§. 1. Es geschiehet öfters, und zwar auch unter Kindern, daß man verschiedene Münzen aufwirft, und, nachdem sie auf den Tisch gefallen, siehet, ob mehr Münz, das ist Köpfe; oder Unmünz, das ist was auf der andern Seite stehet z. E. Wappen 2c. oben liege? Die beyden Spieler rathen mit einander, so, daß ein jeder dasjenige ziehet, was er errathen hat. Gesezt, ich hätte 12[5] aufgeworfen, und der andere wollte das haben, was Ummünz ist; gesezt ferner es wären davon 7 Ummünz gefallen, so würde er sieben, ich aber nur die übrigen fünf beziehen, und folglich, da ein Jeder vorher 6 eingelegt hatte, ich einen davon verlieren.

§. 2. Es giebt auch bey diesem Spiele verschiedene Fälle. Z. E. Wenn man 10[5] aufwürfe, so wäre es weit wahrscheinlicher daß 6[5] Münz fielen als 1, weil 1 nur auf 10erley, 6 aber auf 210erley Weise fallen kann. Wenn ich also wetten wollte, daß ich im ersten Wurf nur 1 Münz werfen sollte; so wäre meine Hoffnung weit geringer als wenn ich im erstenmal 6 treffen sollte.

§. 3. Damit wir aber diese Fälle determiniren mögen, so sey Münz durch Δ, Ummünz durch O vorgestellt. Wirft man

man nun nur einen Thaler auf; so sind nur 2 Fälle möglich, nämlich ein Δ und O.

Wirft man zwey Thaler auf, so sind 4 Fälle möglich, nämlich

ΔΔ ; ΔO ; OΔ ; OO.

Darunter ΔΔ einmal, ΔO zweymal und OO einmal fällt.

Mit 3 Thalern sind 8 Fälle möglich, nämlich

ΔΔΔ	ΔOΔ	OΔΔ	OOΔ
ΔΔO	ΔOO	OΔO	OOO

darunter ΔΔΔ 1mal; ΔΔ 3mal; Δ 3mal; OOO 1mal fällt.

Mit 4 Thalern sind 16 Fälle möglich, nämlich

ΔΔΔΔ	ΔOΔΔ	OΔΔΔ	OOΔΔ
ΔΔΔO	ΔOΔO	OΔΔO	OOΔO
ΔΔOΔ	ΔOOΔ	OΔOΔ	OOOΔ
ΔΔOO	ΔOOO	OΔOO	OOOO

Unter diesen sind

1 . ΔΔΔΔ ; 4 . ΔΔΔ ; 6 . ΔΔ ; 4 . Δ ; 1 . OOOO.

§. 4. Die möglichen Fälle sind also.

Mit Thal.	1.	2.	3.	4.	5.
Münz 0 --- O	1	1	1	1	1
1 --- Δ	1	2	3	4	5
2		1	3	6	10
3			1	4	10
4				1	5
5					1
In allem	2	4	8	16	32 &c.

§. 5. Aus dieser Tabelle sehen wir, daß die Zahl der sämmtlichen möglichen Fälle mit 1, 2, 3, 4, 5, 6 &c. x Thaleren, die 1te, 2te, 3te, 4te, 5te, 6te &c. xte Dignität der Zahl oder Wurzel 2 sey. Folglich, wenn x Thaler sind, so sind 2^x Fälle möglich.

§. 6. Wir sehen ferner daraus, daß, wenn man 2 unter einander stehende Zahlen einer Columne addirt, die Summe eine Zahl der folgenden Columne sey. Z. E. in der 3ten Columne sind 3 und 3 unter einander; die Summe 6 findet sich in der 4ten Columne neben der untern 3.

§. 7. Hieraus folget, daß diese Zahlen gefunden werden, wenn man 1 + 1 zu Dignitäten erhebet. Z. E.

$$2 = 1 + 1 \text{ - - - - - - - - - Fälle für 1 Thaler.}$$
$$1 + 1$$

$$4 = 1 + 2 + 1 \text{ - - - - - - Fälle für 2 Thaler.}$$
$$1 + 2 + 1$$

$$8 = 1 + 3 + 3 + 1 \text{ - - - Fälle für 3 Thaler}$$
$$1 + 3 + 3 + 1$$

$$16 = 1 + 4 + 6 + 4 + 1 \text{ Fälle für 4 Thaler \&c.}$$

§. 8. Das führt auf die längst bekannten figurirten Zahlen, nach beyfolgendem Täfelchen, das man leicht, so weit man will, fortsetzen und erweitern kann.

0		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	&c.
1	$\frac{x}{1} =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
2	$\frac{x}{1} \cdot \frac{x+1}{2} =$		1	3	6	10	15	21	28	36	45	
3	$\frac{x}{1} \cdot \frac{x+1}{2} \cdot \frac{x+2}{3} =$			1	4	10	20	35	56	84	120	
4	$\frac{x}{1} \cdot \frac{x+1}{2} \cdot \frac{x+2}{3} \cdot \frac{x+3}{4} =$				1	5	15	35	70	126	210	
5	$\frac{x}{1} \cdot \frac{x+1}{2} \cdot \frac{x+2}{3} \cdot \frac{x+3}{4} \cdot \frac{x+4}{5} =$					1	6	21	56	126	252	&c.
6		—	—	—	—	—	1	7	28	84	210	
7		—	—	—	—	—	—	1	8	36	120	
8		—	—	—	—	—	—	—	1	9	45	
9		—	—	—	—	—	—	—	—	1	10	
10		—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	&c.
sämtl. Fälle		2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	

§. 9. Der Gebrauch dieser Tabelle kann nebst dem (§. 1.) auch dieser seyn. Es ist die Frage, wie viel ich wetten kann, wenn ich mit 10 Thalern sollte im erstenmale 6 Münzen werfen? aus der Tabelle finde ich, daß mit 10 Thalern 1024 Fälle möglich sind, und daß 6 Münz auf 210erley Art fallen können. Meine Hoffnung ist also $\frac{210}{1024} = \frac{105}{512}$, das ist, etwas mehr als $\frac{1}{5}$. Also hätte ich 1 zu gewinnen, da der andere 4 zu gewinnen hat. Es ist also nöthig, daß ich 1 Thaler gegen 4 wette.

IV. Anmerkungen zum III. Abschnitt vom Münz oder Ummünz.

§. 1. Wir haben §. 7. gezeigt, wie man auf eine 2te Weise die §. 8. bemerkte Tafel berechnen könne; wenn man nämlich 1 + 1 zu derjenigen Dignität erhebet, welche durch die Anzahl der Thaler oder Münzen angezeigt wird. Es bleibt noch übrig, zu zeigen, wie man diese Berechnung auch ohne Tafel und Weitläuftigkeit verkürzen kann.

Gesezt, ich wollte die Fälle mit 6 Thalern finden; so schreibe ich die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 in ihrer natürlichen und verkehrten Ordnung unter einander

1, 2, 3, 4, 5, 6

6, 5, 4, 3, 2, 1

so ist $\frac{6}{1} = 6$ die andere Zahl,

$\frac{6 . 5}{1 . 2} = \frac{30}{2} = 15$ die dritte Zahl,

$\frac{6 . 5 . 4}{1 . 2 . 3} = \frac{30 . 4}{2 . 3} = \frac{15 . 4}{3} = 20$ die vierte Zahl,

$\frac{6 . 5 . 4 . 3}{1 . 2 . 3 . 4} = \frac{20 . 3}{4} = 15$ die fünfte Zahl,

$\frac{6 . 5 . 4 . 3 . 2}{1 . 2 . 3 . 4 . 5} = \frac{15 . 2}{5} = 6$ die sechste Zahl,

$\frac{6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1}{1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6} = \frac{6 . 1}{6} = 1$ die siebente Zahl.

Vor die Zahlen die erst gefunden worden, setze man 1; so hat man

1, 6, 15, 20, 15, 6, 1

für die Fälle von 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 Thaler Münz oder Ummünz.

§. 2. Nach dieser Regel kann man eine allgemeine Formel einrichten. Man setze nämlich: Man wollte die möglichen Fälle für m Thaler bestimmen; so wäre

$$m,\ m-1,\ m-2,\ m-3,\ m-4\ \&c.$$
$$1,\ \ 2,\ \ 3,\ \ 4,\ \ 5,\ \&c.$$

folglich wenn 1 davor gesezt wird.

1 der Fall für 1 Thaler,

$\frac{m}{1}$ die Fälle für 2 Thaler,

$\frac{m.(m-1)}{1.2}$ die Fälle für 3 Thaler,

$\frac{m.(m-1).(m-2)}{1.2.3}$ die Fälle für 4 Thaler &c.

$\frac{m.(m-1).(m-2).(m-3)\&c.(m-x)}{1.2.3.4\&c.x}$ die Fälle für x Thal.,

$\frac{m.(m-1).(m-2).(m-3).(m-4)\&c.(m-m)\&c.}{1.2.3.4\&c.m.}$ die F. f. m Thal.

Und endlich 2^m die Summe aller Fälle.

§. 3. Es drückt also $2^m \times 1 \times 2 \times 3 \times 4 \&c. \times x.$ dividirt in $m.m-1.m-2.m-3 \&c. m-x.$ die Hoffnung aus, die ich habe mit m Thaler das erstemal x Thaler Münz oder Ummünz zu werfen; oder, welches einerley ist, in m Würfen mit einem Thaler x mal Münz oder Ummünz zu werfen.

§. 4. Gesezt, Jemand hätte mit einem Thaler schon 4mal Münz geworfen; es wäre die Frage, wie viel Hoffnung er hätte, es auch das 5te mal zu werfen. Um dieses zu bestimmen, so hat man zu bedenken, daß es eben so viel ist, wenn er mit einem Thaler 5mal oder mit 5 Thalern auf einmal alle Münz werfen wollte. Folglich, da 5 Thaler auf 32erley Arten fallen können, und unter diesen nur ein Fall ist, da alle 5 Thaler Münz fallen, so ist klar, daß seine Hoffnung nur ist wie 1 zu 32. Dieses scheinet zwar widersinnig zu seyn, weil auch der Thaler das 5te mal eben so leicht auf Münz als auf Unmünz fallen kann, und also an sich selbsten seine Hoffnung seyn sollte wie 1 zu 2. Allein wenn man bedenkt, daß in jedem Wurfe der Thaler eben so leicht Münz als Unmünz fallen kann; so scheinet daraus begreiflich, wenn man sagt: Es müsse bey einem mittelmäßigen Glücke, wie wir es hier supponieren, allezeit und wahrscheinlicher Weise die Hälfte der Würfen Münz, die andere Hälfte Unmünz fallen. Folglich, da bey dem ersten Wurfe die Hoffnung Münz zu werfen ist wie 1 zu 2, so ist sie, wenn der erste Wurf geräth, bey dem andern Wurfe wie 1 zu 4; und wenn dieser getroffen, wie 1 zu 8 bey dem 3ten Wurfe; und wenn dieser auch getroffen, so ist die Hoffnung bey dem 4ten Wurfe wie 1 zu 16; ist dieser auch gerathen, so ist sie bey dem 5ten wie 1 zu 32. Weil nämlich die Probabilität und Hoffnung bey den folgenden Würfen zu gewinnen, desto kleiner wird, je mehr vorhergehende Würfe man schon nach einander gewonnen.

(Die Fortsetzung im nächsten Hefte.)